令和３年度
物理学科総合型選抜Ⅱ課題探求試験問題

物理学 (100 点)
令和３年１月23日(土) 9:00〜11:30

注意事項

1. 指示があるまでは，問題冊子ならびに解答冊子を開かないこと。
2. 問題冊子１部，解答冊子１部が配布されていることを確認すること。
3. 「はじめ」の指示があったら，解答を始める前にまず，問題冊子の表紙に続いて問題が **1A** から **3B** まで６題，解答用紙が６枚あることを確認し，全ての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
4. 解答は問題ごとに所定の解答用紙に記入すること。解答に際しては，最終的な答えだけではなく，その答えに至る道筋もていねいに記述すること。必要なら解答用紙の裏面を用いてもよい。
5. 「おわり」の指示があったら，ただちに鉛筆を置くこと。
6. 試験終了後，解答冊子は回収するが，問題冊子は持ち帰ってよい。

問題１（３５点）
１Ａ

A 君は，壁に向かって斜め上にボールを投げ，はねかえってきたボールをキャッチしようと考えた。図 1-1 のように，壁からの距離 L，床からの高さ H の点でボールが手から離れるとする。この位置を原点 O とし，y 軸を鉛直上向きに，x 軸を水平に壁にむかう向きにとる。ボールは xy 平面内を運動するものとし，ボールの初速度の向きと x 軸のなす角度を θ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ とする。壁の表面は x 軸と垂直な摩擦のない平面であり，ボールと壁との間の反発係数を e $(0 < e < 1)$ とする。ボールの質量を m とし，その大きさと空気抵抗は無視できるものとする。重力加速度の大きさを g として，以下の問いに答えよ。

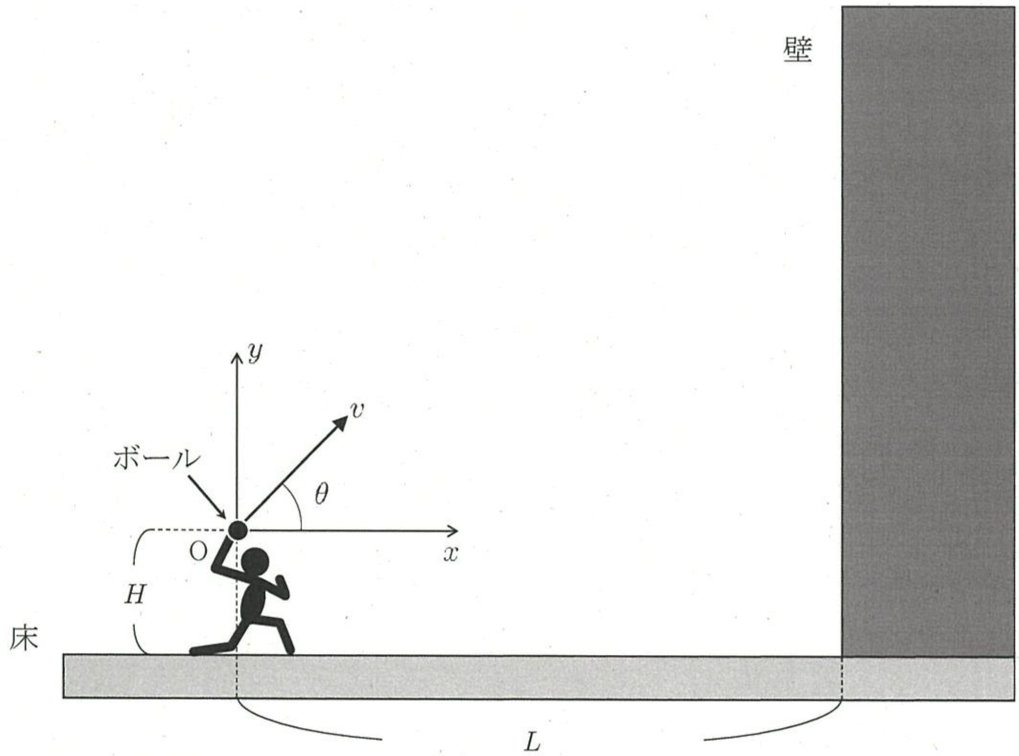

図 1-1

(1) ボールの初速度の大きさが v のとき，ボールは床に衝突することなく壁に当たった。ボールが壁に当たるまでの時間を，v, L, θ を用いて表せ。

(2) ボールの初速度の大きさが v_1 のとき，ボールは床に衝突することなく壁に垂直に当たった。このときの v_1 を求めよ。

次に，A 君が初速度の大きさ $v_2(> v_1)$ でボールを投げたところ，壁ではねかえったボールは，図 1-2 に示すように，床に衝突することなくちょうど原点 O に戻ってきた。

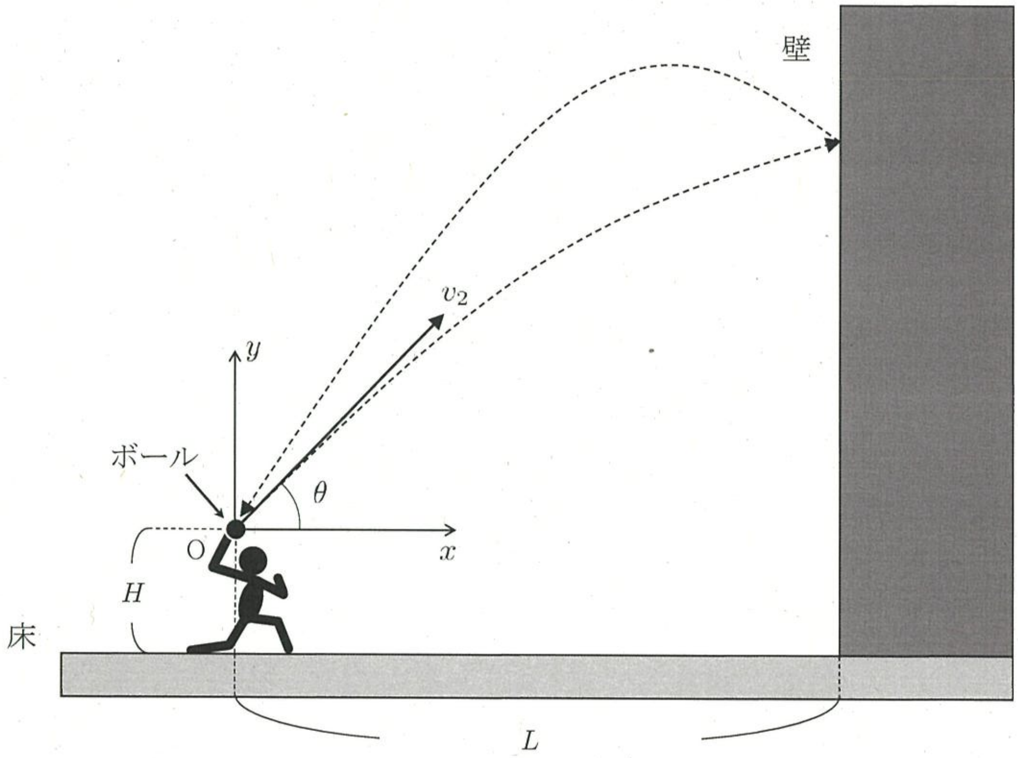

図 1-2

(3) ボールの初速度の大きさが v_2 のとき，壁に当たってはねかえった直後のボールの速度の x 成分と y 成分をそれぞれ答えよ。

(4) ボールの初速度の大きさが v_2 のとき，ボールが A 君の手を離れてから原点 O に戻ってくるまでの時間を求めよ。

(5) v_2 と θ は以下の式を満たす。$f(\theta)$ を θ, g, L を用いて表せ。

$$
{v_2}^2 = \left(1+\frac{1}{e}\right) \times f(\theta)
$$

(6) はねかえったボールが原点 O に戻ってくる条件の下で v_2 と θ を変えたとき，v_2 を最も小さくできる角度を θ_1 とする。θ_1 を求めよ。

1B

図 1-3 のように，質量 M の物体 A を水平な床に置き，物体 A の左端にばね定数 k のばねを接続し，さらにばねの左に丈夫で傾かない板を接続した。はじめ，板，ばね，物体 A は静止しており，ばねは自然長であった。板の左側に，大きさの無視できる質量 $m(< M)$ の小球を置き，右向きに大きさ v_0 の初速度を与えた。物体 A と床の間の静止摩擦係数を μ とする。小球および板と床の間の摩擦，ばねと板の質量，空気抵抗はすべて無視できるものとする。すべての運動は紙面内にとどまっており，小球は回転しないものとする。重力加速度の大きさを g として，以下の問いに答えよ。

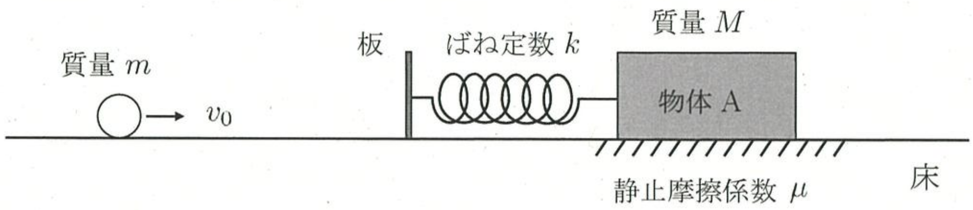

図 1-3

(1) 小球が板に当たると，ばねはある長さまで縮んだのち伸び始めた。ばねの長さが自然長に戻った瞬間に小球は板から離れた。この間，物体 A は動かなかった。小球が板に当たってから離れるまでの時間を求めよ。

(2) ばねが伸び縮みする間，物体 A が動かないでいるための条件を，v_0, m, M, k, μ, g を用いて表せ。

次に，前問と同様に接続された板とばねと物体 A を図 1-4 のような床の上に置いた。この床の表面はなめらかであり，物体 A と床の間の摩擦も無視できるものとする。この床の点 P より右側は水平な平面であり，左側は，点 O を通って紙面に垂直な軸を中心とする半径 h の円筒状の曲面になっている。前問と同じ質量 m の小球を点 P と板の間に置き，右向きに大きさ v_0 の初速度を与えた。その後，小球は板に当たり，ばねが縮むとともに物体 A が加速し始めた。

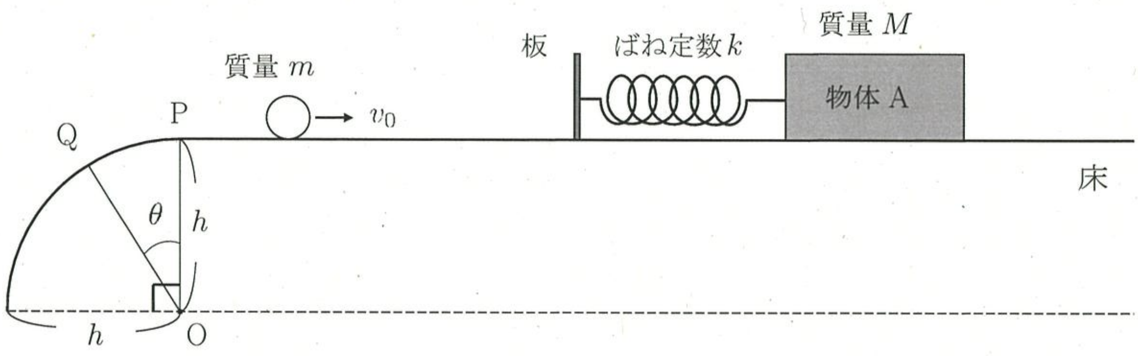

図 1-4

(3) 小球と物体 A の速度が等しくなったときの，これらの速さを求めよ。

(4) 小球と物体 A の速度が等しくなったときの，ばねの縮みを求めよ。

(5) ばねは一度縮んだ後，伸び始めた。ばねが自然長に戻った瞬間，小球は左向きに，物体 A は右向きに動いていた。このときの小球の速さを v_1，物体 A の速さを V_1 とする。v_1 と V_1 を求めよ。

(6) 小球は点 P に到達した後，曲面をすべり降り，点 Q で曲面から離れた。OP と OQ のなす角を θ とする。$\cos\theta$ を v_1, g, h を用いて表せ。

問題２（35点）

２A

導体にかかる電圧と流れる電流の関係をミクロな視点から考えてみよう。図2-1に示すように，断面積S，長さLの導体を考える。この導体内には陽イオンと自由電子が存在する。1つの自由電子の持つ電気量を$-e$（$e > 0$），導体内における単位体積あたりの自由電子の数をnとして，以下の問いに答えよ。

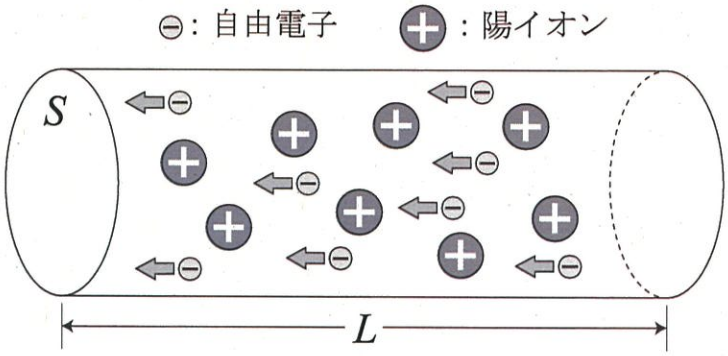

図2-1

この導体の両端間に電圧Vが印加されると，導体内に電場が発生する。自由電子はこの電場による加速と陽イオンとの衝突による減速を繰り返しながら，平均すると一定の速さvで運動をするとみなせる。ただし，陽イオンは移動しないとする。

(1) 電流の大きさIは，導体の断面を単位時間あたりに通過する電気量の大きさとして求められる。IをS, e, n, vを用いて表せ。

(2) 1つの自由電子が電場から受ける力の大きさを，L, e, Vを用いて表せ。

一定の大きさで電流が流れている状況では，自由電子が電場から受ける力と陽イオンから受ける抵抗力がつり合っている。導体の温度が一定の時，抵抗力の大きさはkを比例定数としてkvと表せる。

(3) 導体の電気抵抗をRとすると，オームの法則$V = RI$が成り立つ。RをS, L, e, n, kを用いて表せ。

実際には，導体内に電流が流れると，ジュール熱の発生により導体の温度が上昇し，陽イオンが激しく振動することで，自由電子が陽イオンから受ける抵抗力が強くなる。このことをモデル化して，導体の温度 T は I の増加にともなって単調に増加し，k は $k=k_0(1+\alpha T)$ のように T の関数として表せるとする。ここで，α と k_0 はそれぞれ物質により異なる値を持つ定数である。以下では，$\alpha=0$ の物質からなる導体A，$\alpha>0$ の物質からなる導体Bを考える。

(4) 導体Aおよび導体Bに電圧 V を印加し，十分に時間が経過すると，一定の大きさの電流が流れる。この電流の大きさ I と V の関係として，それぞれ最も適当なものを図 2-2 の (a)~(d) の中から選べ。

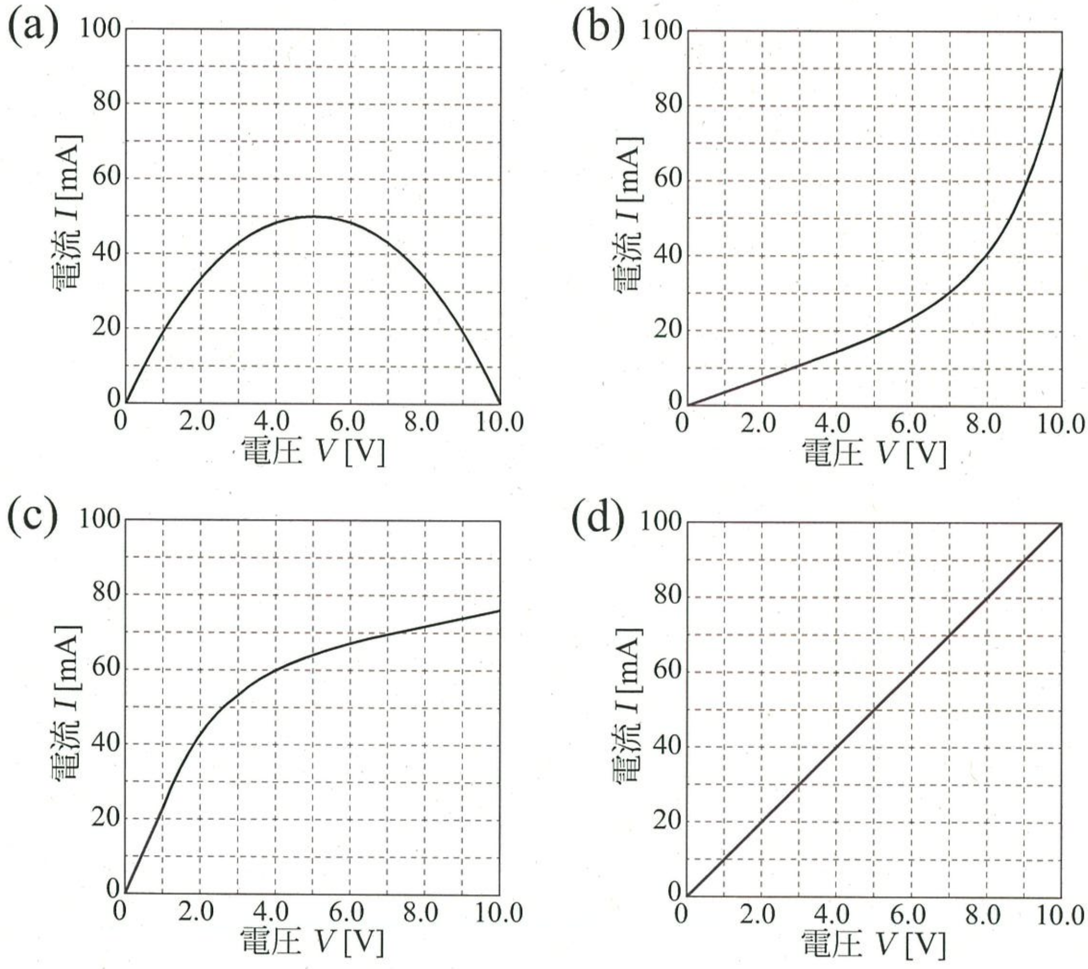

図 2-2

前問 (4) で選んだ電流–電圧特性を持つ導体 A と導体 B，および起電力 E_0 を持つ電源を用いて，図 2-3 に示すような回路を組んだ。導体 A, B 以外の導線における電気抵抗，および電源における内部抵抗は無視できるとする。

(5) 電源の起電力が $E_0 = 10$ V であるときに回路に流れる電流の大きさ I_0 [mA] を，前問 (4) で選んだグラフを用いて求めよ。

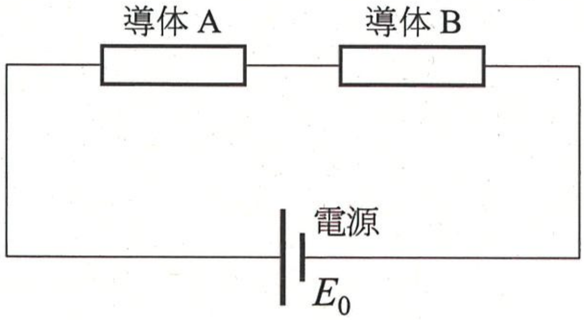

図 2-3

2 B

磁束密度の大きさが $B(>0)$ で鉛直上向きの一様な磁場内に，図 2-4 に示すような回路が水平面上に置かれている。回路には，電気抵抗 R を持つ抵抗，極板 P1, P2 からなり静電容量 C を持つコンデンサー，間隔 l で平行に置かれた十分長い 2 本の導体レールが導線で接続されている。このレール上に質量 m の導体棒が置かれている。導体棒は，常にレールと直角に接したままレール上を空気抵抗および摩擦なしに滑ることができる。図 2-4 のようにレールと平行に x 軸をとり，導体棒の速度，加速度の x 成分をそれぞれ v, a とし，いずれも x 軸の向きを正とする。時刻 $t=0$ における速度の x 成分は $v_0(>0)$ で，極板 P1, P2 に蓄えられている電気量はいずれも 0 であった。導線，レールおよび導体棒の電気抵抗は無視できるとする。また，回路を流れる電流が作る磁場は無視できるとして，以下の問いに答えよ。

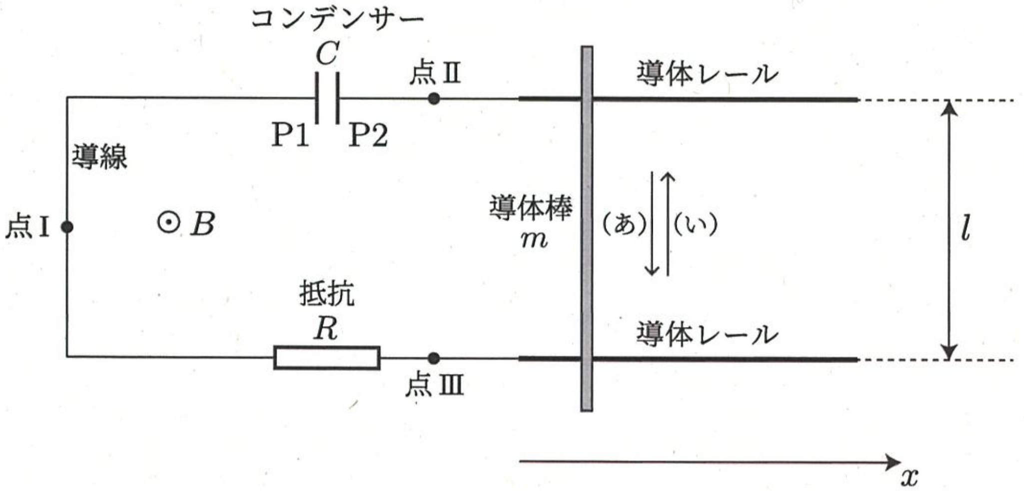

図 2-4

(1) 時刻 $t=0$ で導体棒に流れる電流の向きは，図 2-4 中の（あ），（い）のいずれの向きか答えよ。また，このとき導体棒に働く力の向きは，x 軸の正負いずれの向きか答えよ。

(2) 導体棒に流れる電流の大きさを I とする。a を B, l, m, I を用いて表せ。

ある時刻 $t(\geqq 0)$ から十分短い時間 Δt が経過する間の v の変化を Δv，極板 P1 に蓄えられている電気量 Q の変化を ΔQ とする。

(3) Δv と Δt の間，および ΔQ と Δt の間にはそれぞれ比例関係が成立する。Δv を B, l, m, ΔQ を用いて表せ。

(4) 前問 (3) の結果をもとに，v と Q の関係を下記のような考え方で導出した。文中の $\boxed{\quad ア \quad}$・$\boxed{\quad イ \quad}$ に入る式を，B, l, m, v_0 のうち必要なものを用いてそれぞれ表せ。

「図 2-5 のように v と Q の関係は傾き $\boxed{\quad ア \quad}$ の直線の一部となる。時刻 $t = 0$ で $Q = 0$ であったことを考慮すると，この直線の v 切片は $\boxed{\quad イ \quad}$ となる。その結果，v は Q の関数として $v = \boxed{\quad ア \quad} Q + \boxed{\quad イ \quad}$ と表される。」

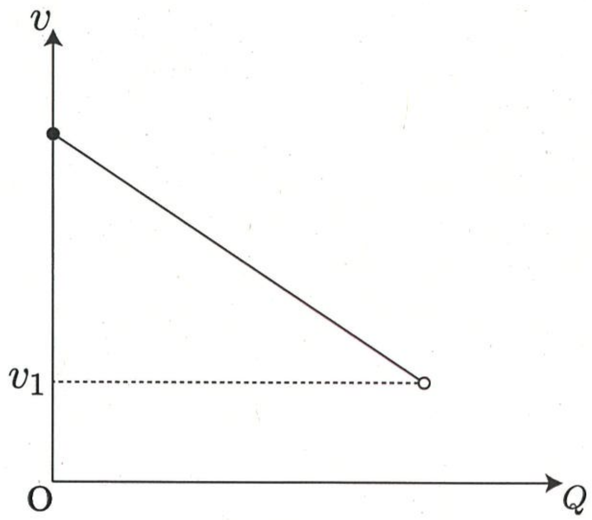

図 2-5

(5) 十分に時間が経過すると，導体棒の速度の x 成分は一定の値 v_1 に近づく。v_1 を B, C, l, m, v_0 を用いて表せ。

図 2-4 の点 I，点 II，点 III の電位をそれぞれ V_1, V_2, V_3 とし，各点間の電位差を $V_{21} = V_2 - V_1$, $V_{32} = V_3 - V_2$, $V_{13} = V_1 - V_3$ とする。

(6) V_{21}, V_{32}, V_{13} の時間変化の概形を表したグラフとして最も適当なものを，それぞれ図 2-6 の (a)～(i) の中から選べ。ただし，各グラフの縦軸 V は適宜 V_{21}, V_{32}, V_{13} と読みかえよ。

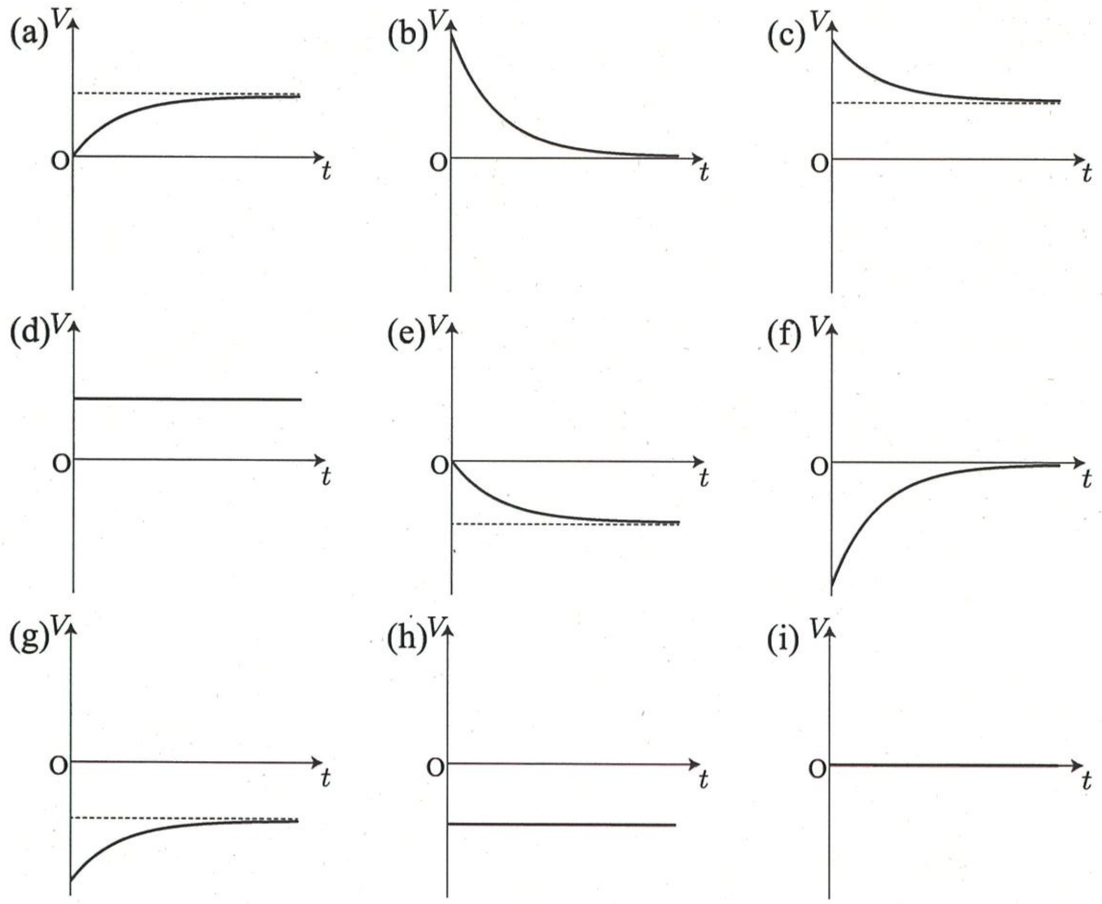

図 2-6

(7) 十分に時間が経過した後の V_{21}, V_{32}, V_{13} を，B, C, l, m, v_0 を用いてそれぞれ表せ。

(8) $t = 0$ から十分に時間が経過するまでに抵抗で発生したジュール熱の総量を，B, C, l, m, v_0 を用いて表せ。

問題３（３０点）
３Ａ

図 3-1 のように，x 軸上に張られた静止した弦の上を，波長 λ で一定の振幅を持つ正弦波が，$x<0$ の領域から $x=2\lambda$ の位置にある固定端に向けて，一定の速度で入射するとする。弦の変位は x 軸と直交する y 軸方向に生じる。入射波による弦の変位を，位置 x および時刻 t の関数として $y_1(x,t)$ と表す。入射波の先端は時刻 $t=0$ の時点で $x=0$ に達する。この時刻以降，$x=0$ における入射波による弦の変位は，振幅 A および周期 T を用いて，$y_1(0,t)=A\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)$ と表される。図 3-1 の領域 I $(0\leqq x\leqq 2\lambda)$ の弦の運動について，以下の問いに答えよ。

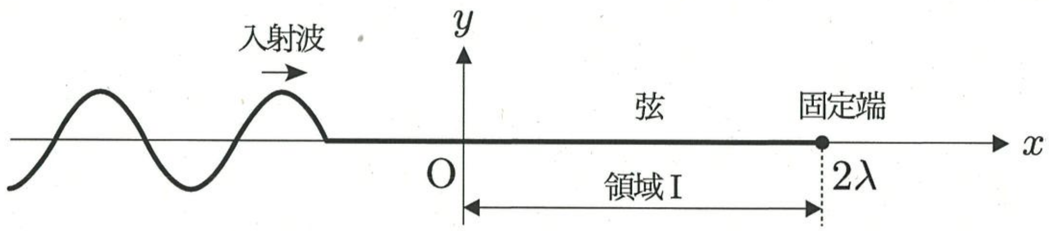

図 3-1

入射波の先端が $x=0$ を通過してから $x=2\lambda$ に達するまでの弦の運動を考える。

(1) 位置 x に入射波が到達した時刻以降の，入射波による弦の変位 $y_1(x,t)$ を考えよう。入射波が距離 x を伝わるのに要する時間を Δt とすると，$y_1(x,t)=y_1(0,t-\Delta t)=A\sin(2\pi\times f(x,t))$ と表すことができる。Δt および $f(x,t)$ を求めよ。

入射波は $x=2\lambda$ の固定端で減衰することなく反射する。

(2) 時刻 $t=\dfrac{13}{4}T$ における入射波および反射波の概形を，それぞれ破線および実線で解答欄 (ア) にかけ。また，この時の弦の概形を実線で解答欄 (イ) にかけ。

(3) 問 (1) と同様に，入射波が固定端で反射して位置 x に戻ってくるまでの時間を考え，反射波による変位 $y_2(x,t)$ を求めよ。ただし，$\sin(\theta\pm 2\pi)=\sin\theta$，もしくは $\cos(\theta\pm 2\pi)=\cos\theta$ を用いて，位相に含まれる定数項を 0 以上，かつ 2π 未満とせよ。

(4) $t=4T$ 以降，領域 I において入射波と反射波によって作られる合成波は定常波となり，その変位は，$y_3(x,t)=A'\times\cos g(t)\times\sin h(x)$ の形で表すことができる。$A', g(t), h(x)$ を求めよ。ただし，公式 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ または $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ を用いて良い。

(5) 領域 I における定常波の腹の x 座標を全て答えよ。

3B

1 mol の単原子分子からなる理想気体を用いた熱機関を考える。図 3-2 のようなサイクルに沿って，気体の圧力 P および体積 V をゆっくりと変化させる。気体は最初，圧力 P_0，体積 eV_0 の状態 A にあり，状態 A から状態 B へは絶対温度 T_0 で等温変化，状態 B から状態 C へは体積 V_0 で定積変化，状態 C から状態 D へは絶対温度 $3T_0$ で等温変化，状態 D から状態 A へは体積 eV_0 で定積変化する。e は自然対数の底である。e, P_0, V_0 の中から必要なものを用いて以下の問いに答えよ。

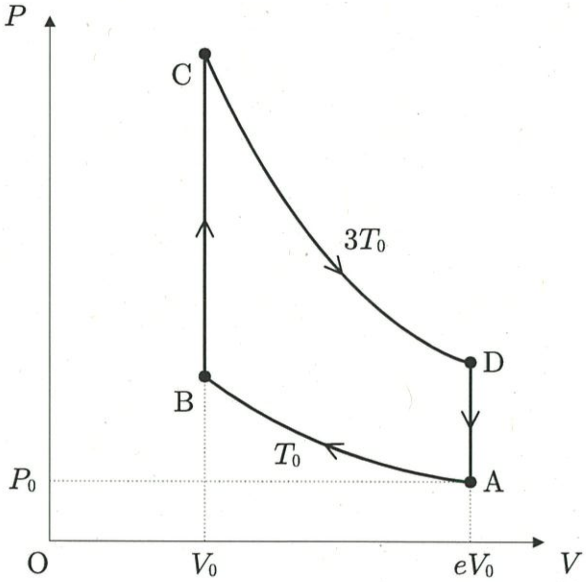

図 3-2

(1) 状態 B, C, D における気体の圧力をそれぞれ求めよ。

(2) 状態 B から状態 C への過程で気体が外部から吸収した熱 $Q_{\mathrm{IN}}^{\mathrm{BC}}$ と，状態 D から状態 A への過程で気体が外部に放出した熱 $Q_{\mathrm{OUT}}^{\mathrm{DA}}$ をそれぞれ求め，$Q_{\mathrm{IN}}^{\mathrm{BC}}$ と $Q_{\mathrm{OUT}}^{\mathrm{DA}}$ の関係を書け。

(3) 状態 A から状態 B への過程で気体が外部にした仕事を計算すると，$-eP_0V_0$ となる。この過程で，気体が外部に放出した熱 $Q_{\mathrm{OUT}}^{\mathrm{AB}}$ を求めよ。

(4) 状態 C から状態 D への過程で気体が外部にした仕事は，状態 A から状態 B への過程で気体が外部にした仕事の何倍となるか答えよ。

(5) この熱機関の効率 η を求めよ。ただし，$\eta = 1 - \dfrac{(\text{気体が外部に放出した熱})}{(\text{気体が外部から吸収した熱})}$ とする。

状態 D から状態 A への過程で放出されていた熱 $Q_{\mathrm{OUT}}^{\mathrm{DA}}$ のうち，$\alpha Q_{\mathrm{OUT}}^{\mathrm{DA}}$ の熱を蓄えておき，残りの熱が外部に放出されるように，熱機関を改良した。蓄えられていた熱は，状態 B から状態 C への過程で気体に戻されるとする。ただし，$0 < \alpha < 1$ とする。

(6) 改良された熱機関の効率 η' を α の関数として求めよ。また，η' が，気体の温度を用いて定義される量，$\eta_{\max} = 1 - \dfrac{(\text{気体の低温時の温度 } T_0)}{(\text{気体の高温時の温度 } 3T_0)} = \dfrac{2}{3}$ を超えないことを示せ。