平成 21 年度物理学科 AO 選抜課題探求試験問題

物理学（100 点） 平成 21 年 1 月 31 日 （土） 9:00 - 11:30

注意事項

1．指示があるまでは、問題冊子ならびに解答冊子を開かないこと。
また、鉛筆を持たないこと。

2．問題冊子１部、解答冊子１部が配布されていることを確認すること。

3．「はじめ」の指示があったら、まず問題冊子に白紙１枚と問題用紙が４枚、解答冊子に解答用紙が８枚あることを確認し、すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。その後に問題解答を始めること。

4．解答は問題ごとに所定の解答用紙に記入すること。解答に際しては最終的な答えだけでなく、その答えに至る道筋も丁寧に記述すること。

5．「おわり」の指示があったら、直ちに鉛筆を置くこと。

6．試験終了後、解答冊子は回収するが、問題冊子は持ち帰ってよい。

問題1 (35点)

1A

地上の点Oから仰角 θ $(0 < \theta < \pi/2)$、速さ v_0 で小物体を投げた。投げた時刻を0、重力加速度の大きさを g とし、以下の問いに答えよ。

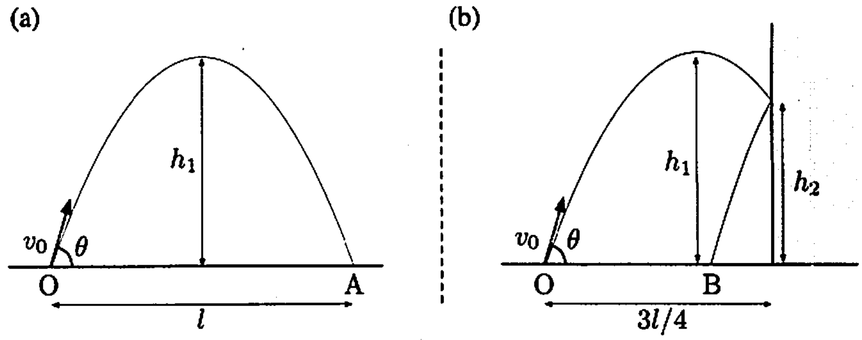

図1-1

図1-1(a)のように、小物体は放物運動し、地上の点Aに落下した。

(1) 小物体が最高点に達する時刻 t_1 と最高点の高さ h_1 を v_0, θ, g を用いて表せ。

(2) 点Oから小物体の落下地点Aまでの距離 l を v_0, θ, g を用いて表せ。

(3) 速さ v_0 を固定して、仰角 θ を変化させた時、l が最大となる角度 $\theta_{\max}$ を求めよ。

図1-1(b)のように、点Oから $3l/4$ の地点に壁がある場合を考える。小物体が高さ h_2 で壁に衝突し、はねかえって点Bに落下した。

(4) 高さ h_2 を h_1 を用いて表せ。

(5) 衝突する直前の速度 $\vec{v_1}$ の水平方向成分の大きさ $v_{1\mathrm{H}}$、鉛直方向成分の大きさ $v_{1\mathrm{V}}$ を v_0, θ を用いて表せ。

(6) 壁のはねかえり係数が e の時、点Oから点Bまでの距離 l' を e, l を用いて表せ。

1B

図 1-2 のように、質量がそれぞれ m_A, m_B である二つの物体 A, B が、滑らかで水平な床の上を同一直線上でそれぞれ速さ v_A, v_B $(v_A > v_B)$ で同じ方向に動いている。速さの大きい物体 A が物体 B に衝突して、衝突後それぞれ v'_A, v'_B の速さでそれまでと同じ方向に進んだ。以下の問いに答えよ。

図 1-2

(1) 衝突する前のある時点での物体 A, B の位置を x_A, x_B $(x_A < x_B)$ として、二つの物体の重心 C の位置 x_{C1} と、重心と物体間の距離の比 $r_A/r_B = (x_{C1} - x_A)/(x_B - x_{C1})$ を求めよ。

(2) (1) の時点から時間 t 経過後にはまだ衝突していないものとする。このときの重心 C の位置 x_{C2} と速さ v_C を求めよ。

(3) 衝突後の重心 C の速さ v'_C と (2) で求めた v_C が等しくなることを示し、その理由を述べよ。

1C

図 1-3 のように、質量がそれぞれ m_A, m_B である二つの物体 A, B 間に万有引力が働き、重心 C の周りを半径がそれぞれ r_A, r_B の等速円運動しているとする。ただし、二つの物体間には万有引力しか働いていないものとする。万有引力定数を G とし、以下の問いに答えよ。

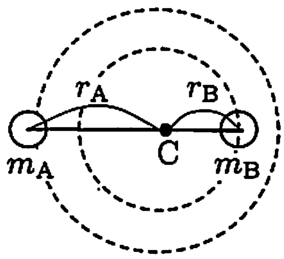

図 1-3

(1) 物体 A, B それぞれの円運動の運動方程式を書け。ただし、角速度の大きさを ω とする。

(2) $r_A + r_B = R$ とし、ω を m_A, m_B, R, G を用いて表せ。

(3) 物体 A, B の公転周期を T として、T^2 と R^3 の比を求めよ。

問題 2 (35 点)

2A

図 2-1(a) に示すように、4 本の抵抗と電球 P を使ってブリッジ回路を作り、内部抵抗の無視できる電池 (起電力 E) に接続した。各抵抗の値は図に示す通りである。A から C へ流れる電流を i_1、A から D へ流れる電流を i_2、C から D へ流れる電流を i とおく。以下の問いに答えよ。

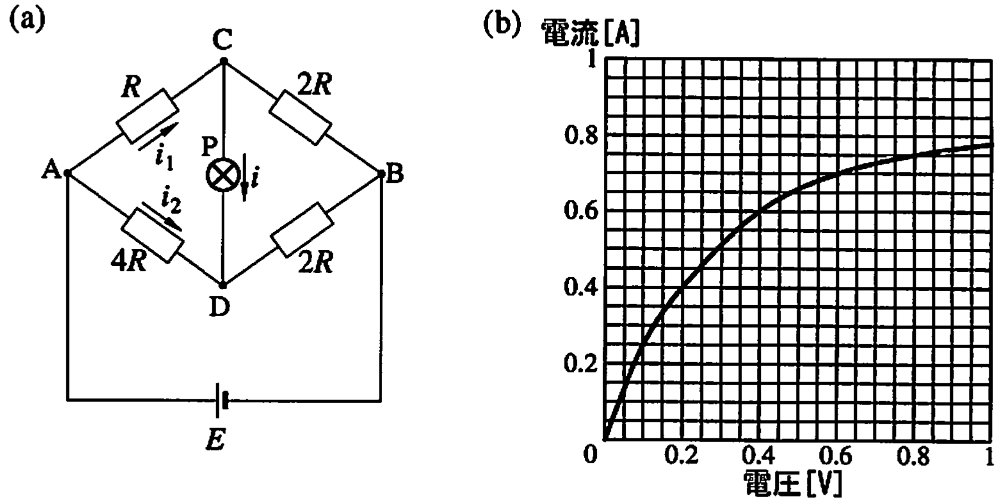

図 2-1

(1) C から B へ流れる電流と D から B へ流れる電流を、i, i_1, i_2 を用いて表せ。

(2) 電流 i_1 を、i, E, R を用いて表せ。

(3) 電流 i_2 を、i, E, R を用いて表せ。

(4) 点 D に対する点 C の電位を V_P とおく。電流 i を、E, R, V_P を用いて表せ。

(5) 電球 P の電圧－電流特性を図 2-1(b) に示す。$E = 3.0$ V、$R = 0.50\,\Omega$ として i と V_P の値を求めよ。その際、解答用紙の電圧－電流特性に導出過程を示せ。

2B

図 2-2 に示すように真空中の xy 平面内に、2 本の長い平行電流 A, B、2 本の金属レール、および金属棒 C を配置し、紙面手前方向に z 軸の正の向きをとる。平行電流 A, B はいずれも大きさ I_0 で、y 軸方向の負の向きに流れている。$x = -a$ の位置にある電流を A、$x = a$ の位置にある電流を B とする ($a > 0$ とする)。2 本の金属レールは、x 軸に平行に $y = \pm L/2$ の位置に $-a < x < a$ の範囲で敷かれており、いずれも厚さと幅を無視できる。その上に太さの無視できる金属棒 C(長さ L) を x 軸に垂直に置く。金属棒 C の位置を x 軸との交点 P$(x, 0, 0)$ $(-a < x < a)$ で表す。金属レールにリード線を接続し、これらを通して金属棒 C に y 軸方向の正の向きに電流 I_1 を流した。金属レールおよびリード線に流れる電流が作る磁界 (磁場) は無視できるものとする。真空の透磁率を μ_0 として以下の問いに答えよ。

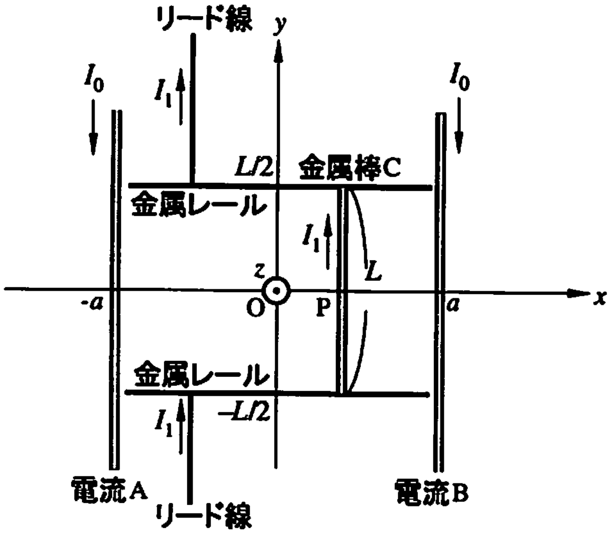

図 2-2

(1) 電流 A, B が点 P$(x, 0, 0)$ にそれぞれ作る磁界の大きさ H_{A}, H_{B} とそれらの向きを求めよ。

(2) 金属棒 C を点 P$(x, 0, 0)$ に動かないように固定したとき、電流 A, B の作る磁界からそれぞれ受ける力 $\overrightarrow{F_{\mathrm{A}}}$, $\overrightarrow{F_{\mathrm{B}}}$ の大きさとそれらの向きを求めよ。力の大きさの解答には H_{A}, H_{B}, I_1, μ_0, L の中から必要な記号を用いよ。

(3) (1) で求めた H_{A}, H_{B} を (2) の解答に代入して、$\overrightarrow{F_{\mathrm{A}}}$ と $\overrightarrow{F_{\mathrm{B}}}$ の合力 $\overrightarrow{F}$ の x 成分 F_x を求め、x の関数 $(-a < x < a)$ としてその概形を描け。

(4) $|x|$ が a より十分小さいとして、(3) で求めた F_x を近似すると $F_x \fallingdotseq -kx$ となる。k を求めよ。その際、次の近似式を用いてよい。

$$|t| \text{ が 1 より十分小さいとき、} \frac{1}{1+t} \fallingdotseq 1 - t$$

問題 3 (30 点)

3A

音波に関する以下の問いに答えよ。ただし、音波の速さを v とし、波は 1 波長を 1 個と数えるものする。

(1) 図 3–1 のように、原点にスピーカーを置き、音波の進行方向に x 軸を取る。時刻 $t<0$ ではスピーカーは動作しておらず、時刻 $t=0$ でスピーカーの膜が振動を始め、$t>0$ で振動し続ける。このスピーカーの膜の振動により、原点 $x=0$ での空気は変位 $y=A\sin 2\pi ft$ で単振動し、この空気の振動が縦波 (疎密波) となって、x 軸方向に速さ v で音波として伝わる。ここで、f は振動数、$A>0$ は空気振動の振幅で、変位 y は音波の進行方向を正に取るものとする。

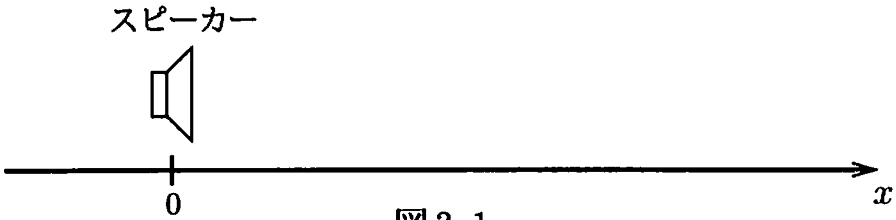

図 3–1

(1–1) $t>L/v$ の時、$x=0$ から $x=L$ の範囲にある波の個数を求めよ。

(1–2) 振動数 $f=20\text{Hz}$、音波の速さ $v=300\text{m/s}$ の時、時刻 $t=0.10\text{s}$ における空気変位を x 座標 $(x>0)$ の関数として図示せよ。ただし、図は略図でよいが、変位がゼロとなる点の x 座標の値と、音波がどの x 座標まで伝わっているかを必ず書き込むこと。

(1–3) 前問と同じ条件で、空気の密度が最も疎になっている点の x 座標をすべて求めよ。

(2) 図 3–2 に示されているように、直線上に固定された振動数 f の音波を出すスピーカー S と、S に向かって一定の速さで動いている反射体 R がある。

図 3–2

(2–1) 反射体 R の速さを u とする。ただし、$u<v$ である。反射体 R が速さ u で動いていることに注意して、1 秒間に反射体 R が反射する波の個数と、1 秒間に反射波が進行方向にどれだけの距離拡がるかを求めよ。

(2–2) 反射体 R とスピーカー S との間にいる観測者が観測する反射波の振動数 f_1 を求めよ。

(2–3) 次に、反射体 R とスピーカー S との間にいる観測者は、1 秒間に f_0 個のうなりを観測したとする。このことから、反射体 R の動いている速度 u を求め、v, f, f_0 を用いて表せ。なお、これは飛行体の速度を測るスピードガンの原理として使われる。

3B

熱気球が上昇したり、空中で静止したりする原理を考えよう。図3-3のように、熱気球には空気を貯める風船部の下端に小さな開口部があり、風船内部の空気を外の大気と等しい圧力に保っている。この開口部にはさらにヒーターがあり、風船内部の空気の温度を自由に調節することができる。熱気球の全質量 (内部の空気の重さを除く) を M、風船部の体積を V(体積 V は常に一定で、ゴンドラ部の体積は無視できるとする)、地表での大気の密度を ρ_0 とする。また、大気は理想気体とし、今考えている高度までは大気の温度は一定で T_0 とする。なお、温度は絶対温度で考える。風船内部と外の大気との間の熱のやりとりは無視できるものとして、以下の問いに答えよ。

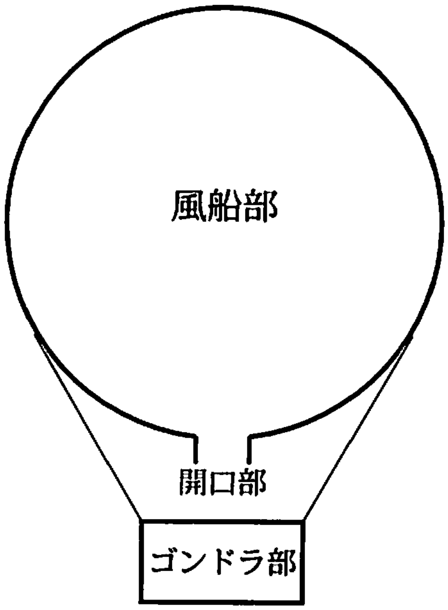

図 3-3

(1) 熱気球が地表から浮くのは浮力による。仮に風船内部が真空だったとして、熱気球が地表から浮くために体積 V が満たすべき条件を求めよ。次に、その条件が満たされているとする。実際には風船部には空気が入っており、熱気球を地表から浮かせるためには、風船内部の空気密度を地表の大気密度より低くする必要がある。熱気球を地表から浮かせるために必要な風船内部の空気の最大密度 ρ を求めよ。

(2) 前問から、ヒーターによって風船内部の空気を温めれば、熱気球を地表から浮かせることができる。何故か、その理由を簡単に述べよ。また、熱気球を浮かせるために必要な風船内部の空気の最低温度 T を求めよ。

(3) 一般に、上空に上がれば上がる程大気の密度は小さくなることが知られている。前問で求めた温度より高い温度 T_1 に風船内部の空気の温度を保つと、熱気球は上昇するが、ある高度で静止する。何故か、その理由を簡単に述べよ。また、静止した時の高度における大気の密度 ρ_1 を求めよ。そして、T_1 を大きくすると求めた ρ_1 が小さくなる (従って、より高い高度に到達する) ことを示せ。