九州大学理学部物理学科（物理学コース）

平成２３年度　　第３年次編入学試験

物理学

平成２２年７月３日（土）　９：００－１２：００

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまでこの冊子を開かないこと。

(2) 問題冊子は表紙を含めず６枚で、問題は［Ｉ］から［III］までである。

(3) 解答用紙は全部で６枚ある。この全てに受験番号と氏名を記入すること。

(4) 問題 [1]、[2]、[3]の解答は、それぞれ２枚の解答用紙に書くこと
(一枚の解答用紙には[1] [2] [3]のいずれか一つのみ書くこと)。

(5) 解答用紙に問題番号{ [I-1], [I-2], [II-1], [II-2], [III-1], [III-2] 及び(1)(2)等}を記入して、解答すること。

(6) 下書きには計算用紙または問題用紙の余白や裏面などを利用し、解答用紙の余白には下書きをしないこと。

(7) 問題冊子は持ち帰ってよい。

[I] (80点)

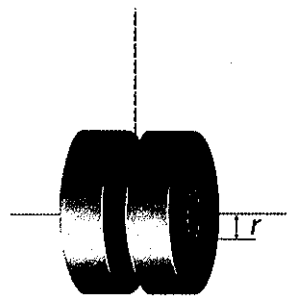
[I-1] 重力加速度が g の一様な重力場の中で、質量 m の質点を鉛直上向きに初速度 v_0 で投げ上げる。ただし、質点には速度 v に比例する γv の大きさの空気抵抗がはたらいている。

(1) 鉛直上向きに座標 x をとり、質点の運動方程式を $v\ (= dx/dt)$ を用いて書け。

(2) 質点の速度を時刻 t の関数として求めよ。

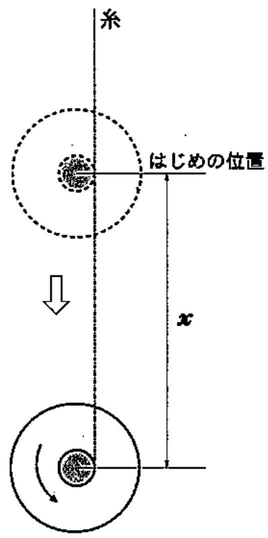
(3) 質点が最高点に達するまでの時間を求めよ。

[I-2]



3つの円柱をそれぞれの中心軸を揃えて接着して作った右図のようなヨーヨーを考える。ヨーヨーの全質量は M、中心軸に関する慣性モーメントは I である。また、小さな円柱の半径は r である。

太さ及び質量の無視できる長い糸の一端を、ヨーヨーの中央部の小さな円柱に固定してその回りに巻きつけた。さらに他端を手で持って固定し、静止した状態から中心軸を水平にして静かにヨーヨーを離した。ヨーヨーの重心は、糸が完全に解けたときには静止した状態から距離 L だけ落下する。糸は十分長く $L \gg r$ であり、糸は常に鉛直方向を向いていると近似してよい。重力加速度の大きさを g として以下の問いに答えよ。ただし、空気抵抗は無視し、ヨーヨーの中心軸まわりの回転以外の回転はないとせよ。



(1) 糸の張力を T として、重心の (鉛直方向の) 運動方程式を書け。ただし、最初の状態からほどけた糸の長さを x とする。

(2) ヨーヨーの中心軸に関する回転角を θ として、落下中の x と θ との関係を書け。ただし、$x = 0$ のとき $\theta = 0$ であるとする。

(3) 落下中の回転運動の (θ に関する) 運動方程式を書け。

(4) ヨーヨーの落下する加速度を (T を用いずに) 表せ。

(5) エネルギー保存則を用いて、$x = l\ (< L)$ のときのヨーヨーの回転の角速度 ω を (T を用いずに) 求めよ。

ヨーヨーが最下点に到達し再び上昇をはじめた直後から、一定の加速度 a で糸の上端を鉛直上向きに引いた。ヨーヨーは再び $x = l$ に到達した。

(6) 糸の上端と一緒に加速度 a で移動している観測者の立場で、ヨーヨーの重心の運動方程式を書け。ただし、糸の張力を T' とせよ。

(7) 前問と同じく、糸の上端と一緒に移動する観測者から見た場合の、$x = L$ でのエネルギーと $x = l$ でのエネルギーの間で成り立っているエネルギー保存の式を書け。ただし、$x = L$ および $x = l$ でのヨーヨーの回転の角速度を、それぞれ ω_L および ω' とせよ。また、ヨーヨーが最下点に達する直前と直後の重心の速度の大きさは等しいとせよ。

[Ⅱ]（80 点）

以下の問題は全て、真空中で考える。単位は MKSA 単位系とし、真空の誘電率を ε_0、真空の透磁率を μ_0 とする。解答は、結果だけでなく導出過程も書くこと。

[Ⅱ－1] 図 1 のように、原点 O を中心とする半径 a の導体球に電荷 Q を与えたところ、電荷は表面に一様に分布した。

(1) 原点からの距離 r が $0 \leqq r < a$ と $a < r$ に分けて、球の内外の電場の大きさ $E(r)$ をガウスの法則を用いて求め、グラフに表せ。その際、ガウスの法則をどのように用いたか具体的に説明せよ。

(2) 電位 $\phi(r)$ を求め、グラフに表せ。ただし、無限遠点の電位を 0 とする。

(3) 電場のもつ単位体積あたりの静電エネルギーは $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(r)$ で与えられる。導体球周りの電場の全エネルギー U を、(1)の結果を用いて求めよ。

(4) (3)で求めた電場の全エネルギーから、導体球の静電容量を求めよ。

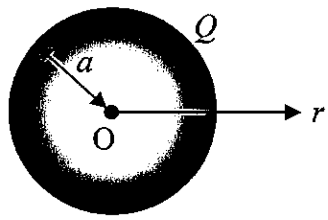


図 1

[Ⅱ－2] 電流の作る磁場について考える。以下の設問(1)～(4)は、次のビオ - サバールの法則を用いよ。

ビオ - サバールの法則： 電流素片 $I\boldsymbol{ds}$ が点 P につくる微小磁場ベクトル $\boldsymbol{dH}$ は、$\boldsymbol{dH} = \dfrac{I}{4\pi}\dfrac{\boldsymbol{ds}\times\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}$ となる。ただし、I は電流の大きさ、$\boldsymbol{ds}$ は回路の線要素を表す微小ベクトル（向きは電流の接線方向）、$\boldsymbol{r}$ は電流素片を始点とし点 P を終点とする位置ベクトルである。

図 2(a)のように、原点 O を中心とする半径 a の円形回路が yz 平面内にあり、電流 I が流れている。点 P を原点 O から x だけ離れた x 軸上にとる。

(1) 位置$(0, 0, -a)$にある電流素片 $I\boldsymbol{ds} = (0, Ids, 0)$ が点 P に作る微小磁場 $\boldsymbol{dH}$ の x 軸に平行な成分 dH_x を求めよ。

(2) 円電流が点 P に作る磁場 $\boldsymbol{H}$ の x 軸に平行な成分 H_x が下の(i)式で与えられることを示せ。

$$H_x = \frac{Ia^2}{2(a^2 + x^2)^{3/2}} \qquad \text{---- (i)}$$

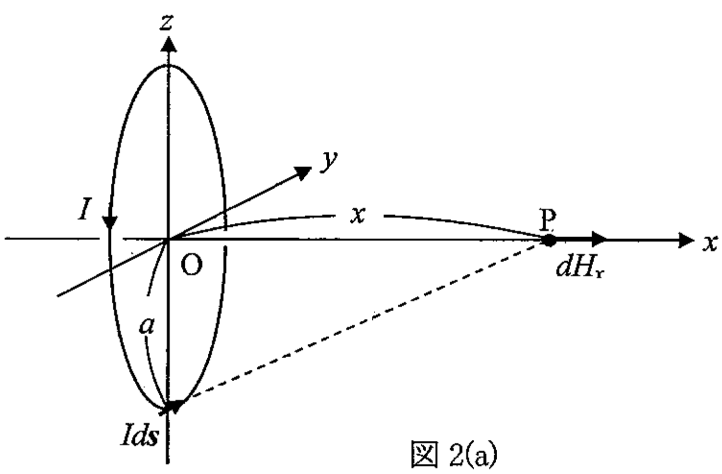


図 2(a)

次に、断面が図 2(b)で表される半径 a の無限に長いソレノイドを考える。ソレノイドの単位長さあたりの巻き数は n で、大きさ I の電流が流れている。

(3) 図のように、点 P から距離 x だけ離れた位置にある微小な長さ dx のソレノイドの一部を考える。この dx 部分の円電流が点 P に作る磁場の x 成分 dH_{sx} を、(i)式を用いて求めよ。

(4) (3)の結果を用いて、ソレノイドの x 軸上の磁場の大きさ H_{sx} を計算せよ。

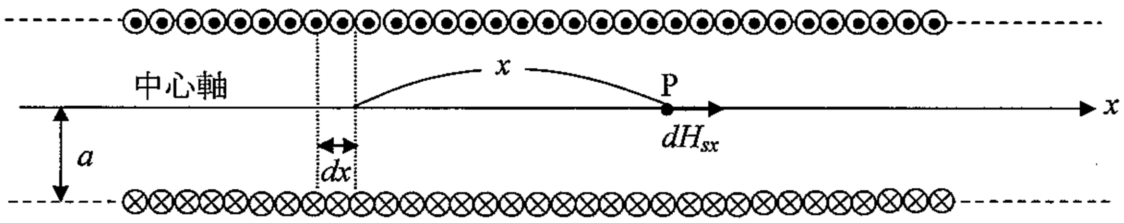


図 2(b)　　⊙ は紙面を貫いて裏から表に、
⊗ は紙面を貫いて表から裏に流れる電流を表す。

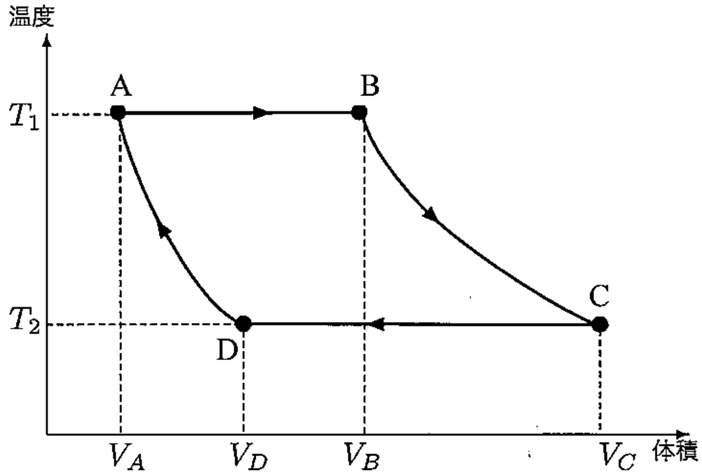
図 2(b)のソレノイドの作る磁場は、アンペールの法則を用いても、(4)と同じ結果が得られる。このことを、以下の手順で示そう。なお、無限に長いソレノイドが作る磁場の、中心軸に対する動径方向の成分はいたるところで 0 であり、またソレノイドから無限に離れると磁場の大きさは 0 であることを用いよ。

(5) 積分形のアンペールの法則を用いて、無限に長いソレノイドの外の磁場は 0 であることを示せ。

(6) 次に、積分形のアンペールの法則を用いて、ソレノイドの中心軸上の磁場の x 成分 H_{sx} を(5)の結果を用いて求めよ。

[III] (80点)

[III-1] 図のように、A→B→C→D→A··· と準静的にサイクルが繰り返される熱機関を考える。作業気体は n モルの理想気体とし、気体定数は R とする。



各過程で作業気体の温度 T は体積 V の関数として次のように表される。

過程 A→B: $T = T_1$

過程 B→C: $T = T_1(V_B/V)^\alpha$ $\alpha > 0$、ただし、$T_2 = T_1(V_B/V_C)^\alpha$

過程 C→D: $T = T_2$

過程 D→A: $T = T_1(V_A/V)^\alpha$、ただし、$T_2 = T_1(V_A/V_D)^\alpha$

温度 T のとき、この理想気体の内部エネルギーが、nRT/α で表されるとして、以下の問いに答えなさい。

(1) 過程 A→B において、
- (a) この熱機関が外部にする仕事を求めなさい。
- (b) 作業気体が得る熱量を求めなさい。
- (c) 作業気体のエントロピー増加量を求めなさい。

(2) 過程 B→C において、
- (a) 作業気体の圧力を V の関数として表しなさい。
- (b) この熱機関が外部にする仕事を求めなさい。
- (c) 作業気体の内部エネルギーの減少量を求めなさい。
- (d) 作業気体が得る熱量が 0 となることを示しなさい。

(3) サイクル全体において、この熱機関が外部にする仕事の総和を求めなさい。

(4) 過程 A→B で作業気体が得る熱量 Q と、サイクル全体で熱機関が外部にする仕事の総和 W の比

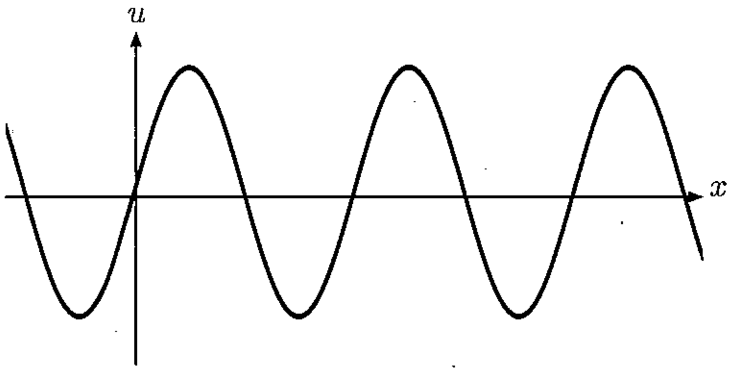
$$\frac{W}{Q}$$

を効率と呼ぶ。この場合の効率を T_1 と T_2 で表しなさい。

[III-2] 一様な細い弦の横振動を考える。図のように x 軸をとり、位置 x での時刻 t における x 軸に垂直な変位 $u(x,t)$ は、微分方程式

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{i}$$

に従うものとする。v は正の定数。



(1) (i) 式には $u(x,t) = F(kx - \omega t)$ および $u(x,t) = G(kx + \omega t)$ の形の解がある。k と ω の関係を求めなさい。ここで、F、G は任意関数で、k と ω は正の定数を表す。

(2) 次に $u(x,t) = F(kx - \omega t) + G(kx + \omega t)$ の形の解を考える。初期条件

$$u(x,0) = A\sin(kx)$$
$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

のもとで、(i) 式の解を以下の (a)〜(d) の手順で求めなさい。

(a) 初期条件から、$F(kx) + G(kx)$ を求めなさい。

(b) 初期条件から、$-F'(kx) + G'(kx)$ を求めなさい。ただし、$F'(x)$ と $G'(x)$ は $F(x)$ と $G(x)$ の導関数を表す。

(c) (b) の結果を積分して $-F(kx) + G(kx)$ を求めなさい。

(d) $u(x,t)$ を求めなさい。