九州大学理学部物理学科（物理学コース）

平成２４年度　第３年次編入学試験

物理学

平成２３年７月２日（土）9:00-12:00

注意事項

（１）試験開始の合図があるまでこの冊子を開かないこと。

（２）問題冊子は表紙を含め７枚で、問題は［Ｉ］から［Ⅲ］までである。

（３）解答用紙には、それぞれ受験番号と氏名を記入すること。

（４）解答は解答用紙の指定された箇所に記入すること。下書きには問題用紙の余白や裏面などを利用し、解答用紙の余白には下書きをしないこと。

（５）問題冊子は持ち帰ること。

[I] (80 点)

[I-1] 平面極座標系 (r,θ) を考えよう。$\boldsymbol{e}_r$ は動径方向 (r 方向) の単位ベクトルとし、$|\boldsymbol{r}| = r$ であり、$\boldsymbol{e}_\theta$ は r 方向に垂直な方向の単位ベクトルである。このとき位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$ と書ける。デカルト座標系で、x 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{i}$、y 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{j}$ とすると次の式が成り立つ。

$$\boldsymbol{e}_r = \cos\theta\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\,\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{e}_\theta = -\sin\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\,\boldsymbol{j}$$

(1) 単位ベクトルの微分 $\dot{\boldsymbol{e}}_r = d\boldsymbol{e}_r/dt$ と $\dot{\boldsymbol{e}}_\theta = d\boldsymbol{e}_\theta/dt$ を計算して、速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ ($\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt$) の r 方向の成分 v_r と θ 方向の成分 v_θ を求めよ。

(2) 加速度ベクトル $\boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{v}/dt$) の r 方向の成分 a_r と θ 方向の成分 a_θ を求めよ。

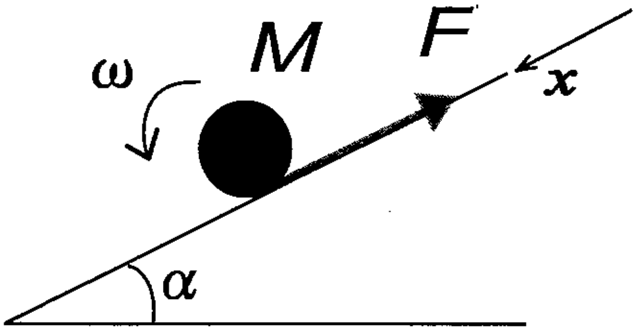
[I-2] 原点のまわりの角運動量は外積を用いて $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ と定義される。ここで $\boldsymbol{r}$ は位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$、$\boldsymbol{p}$ は運動量 $\boldsymbol{p} = (p_x,p_y,p_z)$ である。以下の問に答えよ。

(1) 角運動量の x 成分、y 成分、z 成分を書け。

(2) 質点の運動が (x,y) 平面に限られるとする。このとき平面極座標系 (r,θ) では $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ となることを用いて、単位質量当たりの角運動量の z 成分を r、θ で表せ。

(3) 質点に働く力を $\boldsymbol{F} = f(r)\boldsymbol{r}$ とする。この場合、角運動量 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ を時間微分することにより、角運動量が時間的に一定であることを示せ。

[I-3]　図のように鉛直平面内で、質量 M，半径 a の一様な円板が水平と角 α をなす斜面に沿って、滑らずに転がり落ちるとする。斜面に沿って下向きに x 軸をとる。時刻 $t=0$ で円板の重心の位置を $x=0$ とし，円板は静止していたとする。以下の問いに答えよ。重力加速度を g とする。



(1) 慣性モーメントを I として円板の重心の位置 x を求めることを考えよう。 円板の角速度を ω、摩擦力を F とする。

(a) 円板に関する x 方向の運動方程式を書け。

(b) (a) の運動方程式と回転の運動方程式 $Id\omega/dt = aF$ を用いて x を t の関数として求めよ。

(2) 円板が滑らない場合、力学的エネルギー保存則が成り立つ。

(a) 斜面に沿って円板が x だけ落下したとき、力学的エネルギー保存則はどのように書けるか。ただし、位置エネルギーは $x=0$ を基準点とする。

(b) (a) から dx/dt に関する微分方程式を得る。この微分方程式を解くことにより x を t の関数として求めよ。

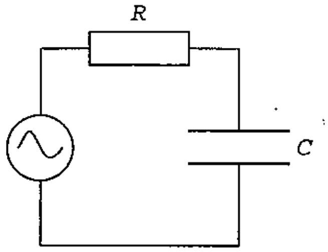
(3) 質量が M で半径が a の薄い円板と細い円輪 (細いリング) を考え、これらが図の斜面を滑らずに転がり落ちる場合を考える。このとき中心を通る回転軸のまわりの慣性モーメントをそれぞれ求めよ。密度は一定とし、細い円輪は円周上にのみ質量をもつとする。

(4) 薄い円板と細い円輪とではどちらが速く転がり落ちるかを比べよ。

[II]　(80点)

[II-1]

図のようにコンデンサー C と抵抗 R の直列回路に交流電源を接続して交流電圧 $V = V_0 \cos \omega t$ をかける.



1. 電荷 $Q(t)$ の微分方程式を書きなさい.

2. 前問の微分方程式は

$$\frac{dx}{dt} + \beta x = \gamma \exp(i\omega t) \tag{1}$$

   の実部をとることに対応する (係数 β, γ は実定数).

   微分方程式 (1) の特殊解を求めるために $x = A \exp(i\omega t)$ を代入して，A を β, γ, ω を使って表しなさい.

3. 前問で求めた $x(t)$ の実部を計算して，$Q(t)$ の特殊解を求めさい. 結果は R, C, V_0, ω, t を使って表すこと. ただし，導出過程を書きなさい.

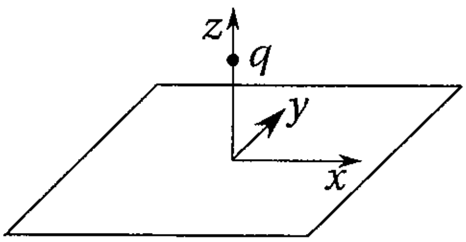
4. 抵抗 R で消費される電力を，1周期 $T = 2\pi/\omega$ で平均して，消費電力の平均値を求めなさい. ただし，導出過程を書きなさい.

[II-2]

真空中に点電荷 q が座標 $(0,0,h)$ $(h > 0)$ に，点電荷 $-q$ が座標 $(0,0,-h)$ にある場合を考える．ただし真空中の誘電率は ϵ_0 とする．

1. (a) 点電荷 q と $-q$ によるポテンシャル $\phi(x,y,z)$ を求めなさい．
   (b) 電場 $\boldsymbol{E}$ の x,y,z 成分 E_x, E_y, E_z を座標 (x,y,z) の関数として求めなさい．
   (c) $z=0$ での電場 E_x, E_y, E_z を書きなさい．

2. 接地した無限平面導体板と点電荷 q の系を考える．図のように導体板上に x,y 軸をとり，導体板と垂直に z 軸をとる．点電荷 q の座標は $(0,0,h)$ とする．



この場合の $z \geq 0$ での電場と，1. で求めた $z \geq 0$ での電場は等価である．

(a) 導体表面のすぐ外側 $(z > 0, |z| \ll h)$ の電場の向きを説明しなさい．

(b) 導体内部の静電場はどうなっているか，導体の性質から説明しなさい．

(c) 導体表面の単位面積あたりの電荷密度 $\sigma(x,y)$ をガウスの法則を用いて求めなさい．ただし，導出過程を書きなさい．

(d) 導体表面の電荷密度 σ を積分して，導体表面の全電荷を求めなさい．ただし，導出過程を書きなさい．

ヒント；

$$\frac{d}{du}(1+u^2)^{-1/2} = -u(1+u^2)^{-3/2} \tag{2}$$

III (80 点)

[III-1] 次の文章を読み、問いに答えよ。

エントロピーを S、絶対温度を T として、準静的な変化をする系を出入りするエネルギーは熱と体積変化による仕事だけに限定する。この場合、T、V の微小変化 dT、dV に対する内部エネルギー E の変化は

$$dE = -PdV + \boxed{\quad (ア) \quad} \qquad ①$$

となる。ここで、P、V はそれぞれ圧力、体積である。

1 モルの理想気体の準静的断熱変化について考える。このとき、系を出入りする熱はないので

$$dE = -PdV \qquad ②$$

となる。また、理想気体の内部エネルギーは T のみの関数なので、dE は定積モル比熱 C_V を用いて

$$dE = \boxed{\quad (イ) \quad} \qquad ③$$

で表せる。1 モルの理想気体の状態方程式 $PV = RT$ から dT を求めて、これと式②、③を用いると

$$(1 + C_V / R)PdV + \boxed{\quad (ウ) \quad}dP = 0 \qquad ④$$

が得られる。ここで、R は気体定数である。

(1) 空欄(ア)～(ウ)に適当な数式を入れよ。

(2) マイヤー(Mayer)の関係 $C_P - C_V = R$ を用いて、$PV^{\gamma} =$ 一定となることを示せ。ここで、C_P は定圧モル比熱、$\gamma = C_P / C_V$ である。また C_V、C_P は V、P によらないとする。

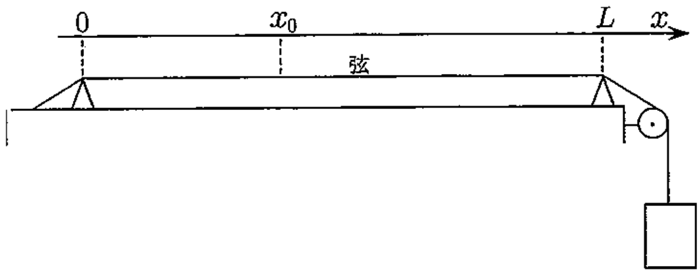
(3) 準静的等温過程と準静的断熱過程で理想気体の体積を変化させたとき、圧力変化はどちらが大きいか答えよ。また、理由も述べよ。

(4) 準静的断熱過程で理想気体の体積を増加させた。このとき気体の温度はどのように変化するか(上昇するか下降するか)答えよ。また、理由も述べよ。

[III-2] 図のように、一様な弦が 2 点$x=0$と$x=L$で固定されて、x軸に沿って張られている。この弦に対してx軸に垂直な変位の振動を考え、時刻tにおける変位$u(x,t)$は微分方程式

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

に従うものとする。ただし、cは正の定数である。



(1) 変位を$u(x,t)=f(x)\cos(\omega t+\alpha)$とする。$f(x)$が満たす微分方程式を求めよ。ただし、$\omega$、$\alpha$は定数である。

(2) $f(x)=A\sin(kx+\beta)$とする。波数kと角振動数ωの間に成り立つ関係を求めよ。ただし、βは定数である。

(3) βを求めよ。ただし、$\pi>\beta\geq 0$とする。

(4) 波数kを正の整数mを用いて表せ。

(5) mで表される振動の振幅A、波数k、角振動数ω、位相αをそれぞれA_m、k_m、ω_m、α_mとすると、弦の運動の一般解は

$$u(x,t)=\sum_m A_m \sin(k_m x)\cos(\omega_m t+\alpha_m)$$

で表される。この一般解に対して、$t=0$での変位が$u(x,0)=0$、$t=0$での速度が$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=V\delta(x-x_0)$で与えられるとする。$A_m$、$\alpha_m$を求めよ。ただし、$\pi>\alpha_m\geq 0$、$L>x_0>0$であり、$x_0$、$V$は定数である。また、デルタ関数$\delta(x-x_0)$は任意の関数$g(x)$に対して次の性質をもつ。

$$\int_0^L g(x)\delta(x-x_0)dx = g(x_0)$$

必要なら次式を用いても良い。

$$\frac{2}{L}\int_0^L \sin(k_m x)\sin(k_n x)dx = \delta_{mn}$$

ここで、δ_{mn}はクロネッカーのデルタであり、$m=n$のとき 1、そうでないとき 0 である。