九州大学理学部物理学科(物理学コース)

平成２５年度　第３年次編入学試験

物理学

平成２４年７月７日(土) 9:00-12:00

注意事項

（１）試験開始の合図があるまでこの冊子を開かないこと。

（２）問題冊子はこの表紙を含め７枚で、問題は［Ｉ］から［Ⅲ］まである。

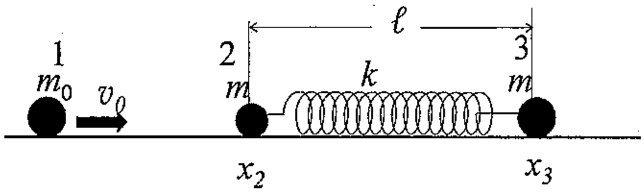
（３）解答用紙には、それぞれ受験番号と氏名を記入すること。

（４）解答は指定された解答用紙に記入すること。下書きには問題用紙の余白や裏面などを利用し、解答用紙の余白には下書きをしないこと。

（５）問題冊子は持ち帰ること。

[I] (80 点)

[I-1]　質量 m の質点 2 及び質点 3 が、自然長 ℓ で質量の無視できるばね定数 k のバネで接続され、静止している。今、質量 m_0 の別の質点 1 が左から速さ v_0 ですべってきて質点 2 に図の様に衝突した。この衝突を弾性衝突として、これらの質点の衝突後の運動について考える。さらに衝突後は質点 2 と質点 3 を 1 つの物体 A とみなす。なお、この運動は 1 次元の運動として床との摩擦は無視できるとする。



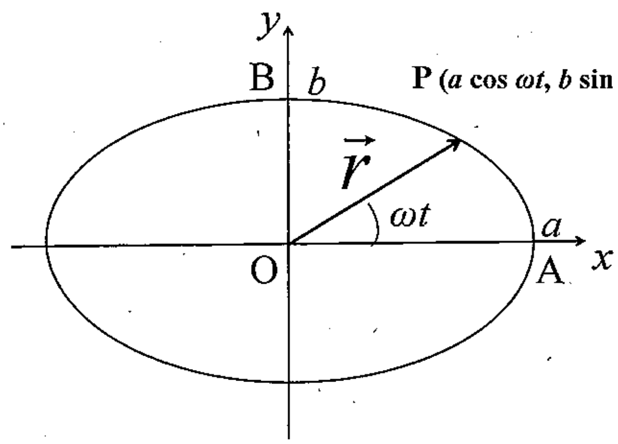
1) 衝突直後の質点 1 及び質点 2 の速度を求めよ。
2) 衝突直後の物体 A の重心の速度を v_0 で表せ。
3) この衝突直後の質点 1 の運動エネルギーと物体 A の運動エネルギーの和を求め、衝突前の質点 1 の運動エネルギーと比較せよ。運動エネルギーが変化している場合にはその理由を述べよ。
4) 衝突前の質点 2 の位置を座標の原点とする。衝突後の質点 2 と質点 3 の相対運動を調べるためにそれぞれの座標を x_2, x_3 とし、相対座標を $x=x_3-x_2$ とする。相対座標 x に関する運動方程式を求めよ。
5) 相対座標 x に関する運動方程式を解け。また相対運動はどのような運動かを述べよ。
6) 時刻 t=0 で衝突した後、時刻 t における x_2 及び x_3 を求めよ。

[I-2]　質量 m の質点 P が xy 平面上を運動しており、図の様に質点 P の位置ベクトルは

$\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{i}\, a\cos\omega t \ + \vec{j}\, b\sin\omega t$　で表される。

ここで a, b 及び ω は定数、$\vec{i}, \vec{j}$ は x, y 方向の単位ベクトルである。

1）　質点Pの速度ベクトルを求めよ。
2）　質点Pの角運動量を求め、これが z 成分のみであることを示し、その値を求めよ。
3）　質点Pに働く力を求め、それが保存力である事を示せ。
4）　質点Pが図のA点からB点まで動く時の運動エネルギーの変化を求めよ。
5）　質点Pの力学的エネルギーを求めよ。



[II] (80点)

以下の問は真空中で考えるものとし、真空中の誘電率と透磁率をそれぞれ ϵ_0、μ_0 とする。解答に必要な変数があれば自分で定義し、解答に必要な図やグラフは、すべて自分で描きなさい。また、結果だけでなく、導出過程も十分に示しなさい。

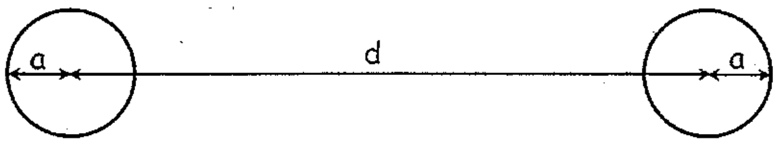
[II-1]

導線に分布する電荷について、以下の問に答えなさい。

問1 無限に長く直線状に伸びた半径 a の導線があり、一定の線密度 σ で電荷が分布している。この電荷が作る電場の大きさを導線の中心線からの距離 r の関数として求めなさい。また、電場の向きを図示しなさい。

問2 問1の導線に分布する電荷が作る電位を r の関数として求め、そのグラフを描きなさい。

問3 無限に長く直線状に伸びた半径 a の二本の平行導線があり、それぞれ一定の線密度 σ、$-\sigma$ で電荷が分布している（下に断面図を示す）。導線の中心軸間の距離 d は導線の半径 a より十分に大きく、各導線の電荷分布は中心軸に対して対称と考えてよい。このとき、導線の間に生じる電位差を求めなさい。



問4 問3の平行導線の単位長さあたりの電気容量を求めなさい。

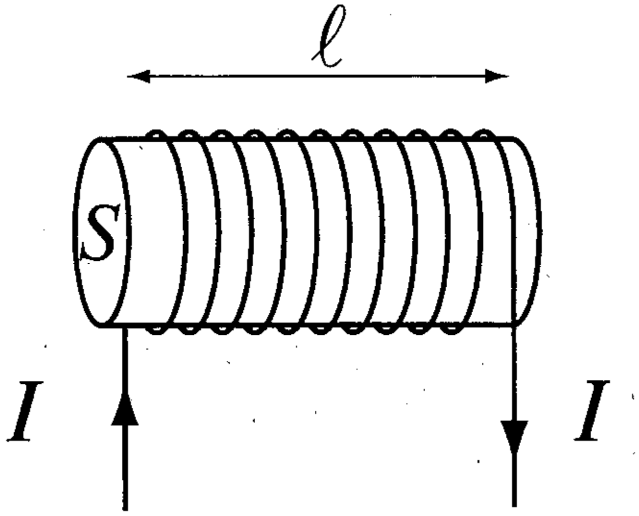
導線を流れる電流について、以下の問に答えなさい。

問5 無限に長く直線状に伸びた太さを無視できる導線があり、電流 I が流れている。この電流が作る磁場の大きさを導線からの距離 r の関数として求めなさい。また、磁場の向きを図示しなさい。

問6 無限に長く直線状に伸びた太さを無視できる二本の平行導線を考える。導線間の距離は d であり、同じ向きにそれぞれ I の電流が流れている。このとき、それぞれの導線の単位長さあたりに働く力の大きさと向きを答えなさい。

[II-2]

下図に示すように、単位長さあたりの巻き数n、断面積S、長さℓで十分に長いソレノイドコイルがある。このコイルの抵抗は無視できるとして、以下の問に答えなさい。



問1 このコイルに電流Iが流れているとき、コイルの内側に生じる磁場の大きさと向きを求めなさい。

問2 問1の条件で、このコイルを貫く磁束Φを計算し、コイルの自己インダクタンスLを求めなさい。

問3 このコイルに外部電源を直列につなぎ、電流を$I=0$から$I=I_0$に変化させる。このとき外部電源が行う仕事を求めなさい。

問4 このコイルに$I=I_0$の電流が流れているときに発生する磁場の持つエネルギーを計算し、問3で求めた外部電源が行う仕事との関係を説明しなさい。

[III] (80 点)

[III-1] ゴム紐の熱力学的性質を張力 K を測定することによって調べる。ゴム紐の長さを L、温度を T、内部エネルギーを U、エントロピーを S とする。

(1) 準静的な微小変化について、$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S + K\mathrm{d}L$ が成り立つものとする。この式の意味を簡単に説明せよ。

(2) 自由エネルギー $F = U - TS$ の微小変化 $\mathrm{d}F$ を求めよ。

(3) K, S, U をそれぞれ F, $\left(\dfrac{\partial F}{\partial T}\right)_L$, $\left(\dfrac{\partial F}{\partial L}\right)_T$, T を用いて表せ。

(4) $\left(\dfrac{\partial S}{\partial L}\right)_T$, $\left(\dfrac{\partial U}{\partial L}\right)_T$ をそれぞれ K, $\left(\dfrac{\partial K}{\partial T}\right)_L$, T を用いて表せ。

(5) ゴム紐の長さを一定に保ちながら温度を変えて張力を測定したところ、$K = A\,T$ という関係が得られたとする。ここに、A は正の定数である。このようなゴム紐を、温度を一定に保ちながら準静的に引き伸ばすと、エントロピーは増えるか減るか、理由とともに答えよ。また、このとき、内部エネルギーの増減はどうなるか、理由とともに答えよ。

(6) (5) と同じゴム紐を準静的に引き伸ばす操作を、断熱的に行うと、ゴム紐の温度は上がるか下がるか、理由とともに答えよ。ただし、長さを一定に保ったときの熱容量 $C_L = T\left(\dfrac{\partial S}{\partial T}\right)_L$ は正であるとしてよい。

[III-2] 一様な細い弦の xy 平面内での振動について考える。弦の両端は $(x, y) = (0, 0)$ と $(x, y) = (L, 0)$ の位置に固定されている (L は正の定数)。弦の形が $y = f(x)$ となるように弦を引っ張って静止させた後、時刻 $t = 0$ に初速度 0 で弦の振動を開始させる。ここに、$f(x)$ は x の適当な関数である。時刻 t における弦の形を $y = u(x, t)$ とし、$u(x, t)$ は波動方程式

$$\text{(A)}: \quad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

に従うものとする。初期条件は、$u(x, 0) = f(x)$ および $\left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$ と表される。弦の形の一般解としてフーリエ級数

$$\text{(B)}: \quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \phi_n)$$

を考える ($n = 1, 2, 3, \cdots$)。ここに、A_n, k_n, ω_n, ϕ_n は x と t には依存しない実数とする。

(1) (B) が (A) を満たすとき、k_n と ω_n の間に成り立つ関係を求めよ。

(2) 両端が固定されていることから、k_n の取り得る値がいくらになるか示せ。ただし、$0 < k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$ とし、小さい方から n 番目を k_n とする。

(3) 初期条件 $\left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$ から、ϕ_n の値を決めよ。ただし、$0 \leqq \phi_n < \pi$ とする。

(4) 初期条件 $u(x, 0) = f(x)$ から、$A_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\sin(k_n x)\mathrm{d}x$ となることを示せ。必要ならば、$m = 1, 2, 3, \cdots$ に対して、$\dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L \sin(k_m x)\sin(k_n x)\mathrm{d}x = \delta_{mn}$ が成り立つことを用いてよい。ここに、δ_{mn} はクロネッカーのデルタ ($m = n$ ならば 1、$m \neq n$ ならば 0) である。

(5) $f(x)$ が、$0 \leqq x \leqq L/2$ に対して $f(x) = \dfrac{2a}{L}x$、$L/2 \leqq x \leqq L$ に対して $f(x) = \dfrac{2a}{L}(L - x)$ で与えられるときに、A_n を求めよ。ただし、a は正の定数とする。