九州大学理学部物理学科(物理学コース)

平成２６年度　第３年次編入学試験

物理学

平成２５年７月６日(土) 9:00-12:00

注意事項

(1)試験開始の合図があるまでこの冊子を開かないこと。
(2)問題冊子は表紙を含め８枚で、問題は[I]から[IV]までである。
(3)解答用紙には、用紙ごとに受験番号と氏名を記入すること。
(4)解答は指定された解答用紙に記入すること。指定された解答用紙であれば、裏面を使って解答してもよい。ただし、下書きには問題用紙の余白や裏などを利用し、解答用紙の余白や裏面には下書きをしないこと。
(5)問題冊子は持ち帰ってよい。

[I] (80 点)

[I-1] 図 1-1 のように，質量 m，長さ l の一様な糸 AB を，壁に打った細い釘 P にかけ，時刻 $t=0$ に静かに手を離す．時刻 $t=0$ での PB の長さを a とし，$a>\dfrac{l}{2}$ とする．また，重力加速度の大きさを g とする．

以下の問いに答えよ．ただし，糸の伸縮や摩擦，空気抵抗の影響は無視し，釘の太さも無視する．

(1) 時刻 $t=0$ での，糸の位置エネルギーを求めよ．ただし，釘の位置を位置エネルギーの基準点とする．

(2) 糸が釘から離れる瞬間の，糸の速さを求めよ．

以下では，時刻 $t=0$ から，糸が釘から離れるまでを考える．図 1-2 のように，時刻 t での PB の長さを h とする．

(3) PB の部分にはたらく重力と PA の部分にはたらく重力の差が，糸の運動を引き起こす力となる．この重力の差の大きさを答えよ。

(4) 糸の加速度の大きさ α を答えよ．

(5) $\alpha=\dfrac{d^2h}{dt^2}$ であることと，(4) の結果から h に関する微分方程式として，

$$\frac{d^2h}{dt^2}+\boxed{\ ①\ }h=\boxed{\ ②\ }$$

を得る．$\boxed{\ ①\ }$ と $\boxed{\ ②\ }$ に当てはまる数式を答えよ．

(6) 初期条件を考慮して (5) の微分方程式を解き，h を時刻 t の関数として表せ．

(7) 糸が釘から離れる瞬間の $\dfrac{dh}{dt}$ を求め，(2) で求めた速さに一致することを示せ．

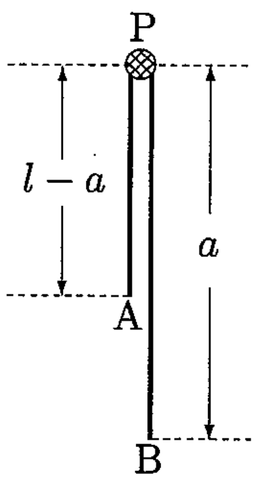


図 1-1

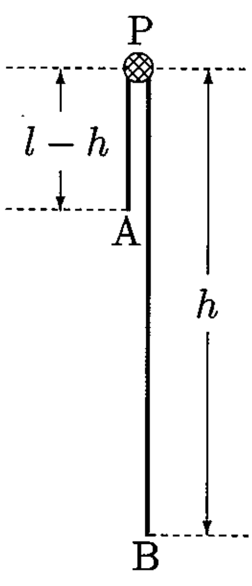


図 1-2

[I-2] 図 1-3 のように，長さ l，質量 M の一様な細い棒がある．棒の重心を G とする．棒の重心から距離 x の点 O のところに水平な回転軸を通して，剛体振り子をつくる．点 O を通り鉛直下向きに z 軸の正の方向をとり，z 軸と OG のなす角を反時計回りに測って θ とする．また，重力加速度の大きさを g とする．

以下の問いに答えよ．ただし，回転軸の摩擦および空気抵抗は無視する．

(1) 棒の重心 G を通り，棒に垂直な軸のまわりの棒の慣性モーメント I_G を求めよ．

(2) 点 O を通る回転軸まわりの棒の慣性モーメント I を求めよ．解答には I_G を用いてもよい．

(3) 点 O を通る回転軸まわりの棒にはたらく力のモーメント (トルク) を答えよ．符号は，反時計回りの回転を与える場合を正とする．

(4) 点 O を通る回転軸まわりの回転に対する剛体の運動方程式を記せ．解答には I を用いてもよい．

(5) $|\theta| \ll 1$ のときの微小振動の周期 T を求めよ．解答には I を用いてもよい．

(6) (5) で求めた周期 T が最小となる x を求めよ．

(7) $x = \dfrac{l}{3}$ とする．棒が鉛直に垂れ下がっている状態で棒に大きさ ω の角速度を与えた．棒が振動せず回転し続けるために必要な ω の最小値を求めよ．

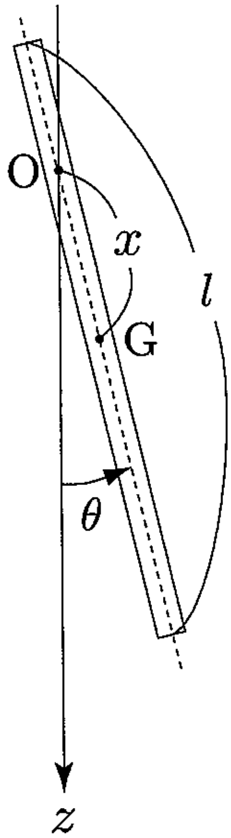


図 1-3

[II]　(80 点)

[II-1]

図 2-1 に示すように，真空中に半径 r_a の十分に長い円柱がある．この円柱の内部に，電荷が一様な密度 ρ ($\rho>0$) で分布している．円柱の中心軸 (z 軸) からの距離を r として，以下の問いに答えよ．ただし，円柱内部の誘電率は真空の誘電率 ε_0 に等しいとする．

(1) 円柱の内部 ($r<r_a$)，円柱の外部 ($r>r_a$) における電場の向きと大きさ E を求めよ．また，E の r に対する変化をグラフに描け．

(2) 円柱表面 ($r=r_a$) の静電ポテンシャルをゼロとして，円柱の内部 ($r<r_a$)，円柱の外部 ($r>r_a$)における静電ポテンシャル V を求めよ．また，V の r に対する変化をグラフに描け．

(3) 円柱の内部 ($r<r_a$) に，電荷 $-q$，質量 m の負の点電荷を静かに置くと，点電荷は単振動を始めた．点電荷は電場だけの力を受けるとして運動方程式を記述し，振動の周期を求めよ．ただし，点電荷の運動により，円柱内部の電荷分布は変化しないとする．

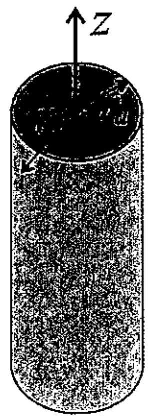


図 2-1

次に，図 2-2 に示すように，前問の円柱と同軸上に，内径 r_b ($r_b > r_a$) の十分に長い中空の円筒導体を配置し，それを接地した場合について考える．

(4) 円筒の内側の表面に誘起される単位長さ(z 軸方向)あたりの電荷を求めよ．

(5) この系に蓄積されている単位長さあたりの静電エネルギーを求めよ．

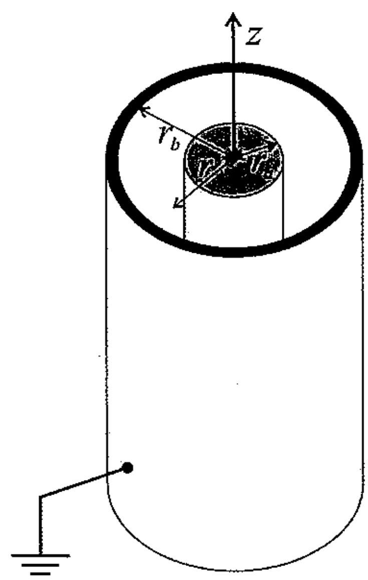


図 2-2

[II-2]

電流素片 $Id\mathbf{s}$ から位置ベクトル $\mathbf{r}$ だけ離れた点に生じる微小磁場 $d\mathbf{H}$ は，ビオ-サバールの法則により，以下のベクトル積で与えられる．ここで $r=|\mathbf{r}|$である．

$$d\mathbf{H}=\frac{Id\mathbf{s}\times\mathbf{r}}{4\pi r^3} \qquad \text{(i)}$$

図 2-3 のような半径 a の円形コイルに電流 I を流した場合を考える．ここで，コイルの中心 O を座標の原点におく．

(1) 式(i)を用いて，コイル全体の電流がコイルの中心 O に作る磁場 $\mathbf{H}$ の大きさと向きを求めよ．

(2) 座標 $(x, y, z)=(0, a, 0)$ に位置する電流素片 $Id\mathbf{s}$ が，点 P に作る微小磁場の x 成分 dH_x，y 成分 dH_y, z 成分 dH_z を求めよ．ここで，点 P はコイルの中心から距離 b 離れた中心軸上の点である．

(3) コイル全体の電流が点Pに作る磁場を求め，その大きさ H は式(ii)で与えられることを示せ．また，磁場の向きが z 軸上向きになる理由を説明せよ．

$$H=\frac{Ia^2}{2\left(a^2+b^2\right)^{3/2}} \qquad \text{(ii)}$$

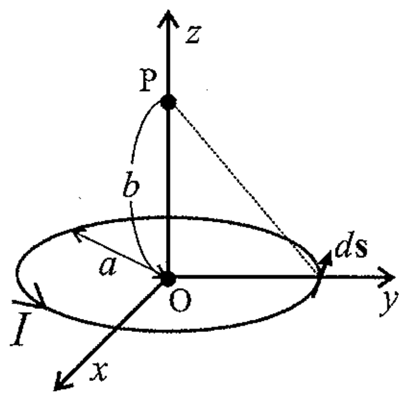


図 2-3

次に，図 2-4 のように，半径 a の２つの円形コイルを中心軸を合わせて配置し，両コイルに電流 I を互いに逆向きに流した場合について考える．ここで，上のコイルの中心を $z=a/2$, 下のコイルの中心を $z=-a/2$ におく．

(4) コイル中心軸上の中点Oから距離 z だけ離れた点Aにおける磁場の向きは中心軸に平行である．このとき，磁場の大きさは，式(iii)で与えられる．$\xi=z/a$ とした場合の定数 β を求めよ．

$$H(\xi)=\beta\left\{\frac{1}{\left(1+\left(\frac{1}{2}+\xi\right)^2\right)^{3/2}}-\frac{1}{\left(1+\left(\frac{1}{2}-\xi\right)^2\right)^{3/2}}\right\} \qquad \text{(iii)}$$

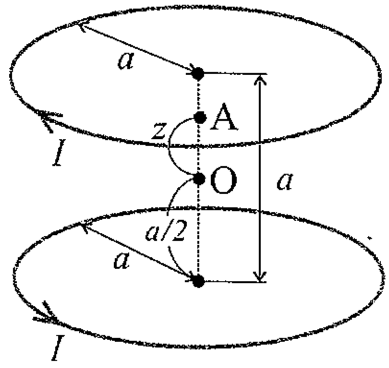


図 2-4

(5) 式 (iii) が，ξ について偶関数か奇関数かを示せ．

(6) $H(\xi)$ を $\xi=0$ のまわりでテイラー展開すると，以下の式で表現できる．□のア～ウの値を導出せよ．ここで，$O(\xi^3)$ は ξ^3 以上の項の総和を意味する．

$$H(\xi)=\beta\left(\boxed{\text{ア}}\,\xi^0+\boxed{\text{イ}}\,\xi^1+\boxed{\text{ウ}}\,\xi^2+O(\xi^3)\right)$$

[III] [40 点]

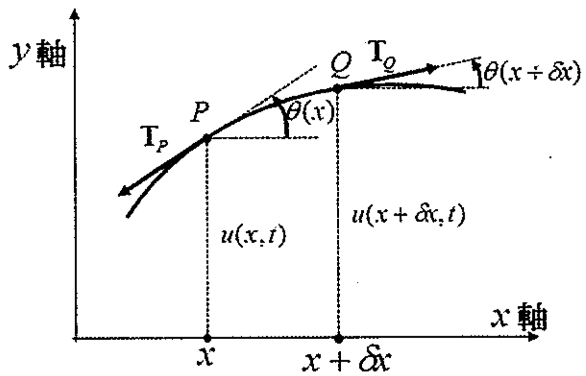
波動方程式

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

について考える。

[III - 1]　以下の①から⑨に当てはまる数式を記せ。

波動方程式(1)を弦の振動を例として以下のように導く。
単位長さあたりの質量がσである一様な弦をx軸上に張る。この弦をx軸に垂直なy軸方向に振動させる（横波）。弦の張力の大きさTは振動している場合でもいたるところで一定とする。振動している弦の平衡位置（x軸）からのy軸方向の変位uを、弦の場所xと時刻tの関数として$u(x,t)$と表す。



弦の場所xと$x+\delta x$（ただし$\delta x>0$）の間の微小部分PQに対する運動方程式を求める。PQにはたらく力$\mathbf{F}$はPにおける張力$\mathbf{T}_P$とQにおける張力$\mathbf{T}_Q$の合力$\mathbf{F}=\mathbf{T}_P+\mathbf{T}_Q$である。$\mathbf{T}_P$と$\mathbf{T}_Q$は大きさ$(T)$は等しいが、向きがわずかに違うので$\mathbf{F}$はゼロにはならない。
場所x、$x+\delta x$における弦の接線とx軸とのなす角をそれぞれ$\theta(x)$、$\theta(x+\delta x)$とする。
$\mathbf{T}_P$と$\mathbf{T}_Q$のx軸方向の成分は、図より

$(\mathbf{T}_P)_x = \boxed{\quad ① \quad}$　、　$(\mathbf{T}_Q)_x = \boxed{\quad ② \quad}$　(2)

となり、y軸方向の成分は

$(\mathbf{T}_P)_y = \boxed{\quad ③ \quad}$　、　$(\mathbf{T}_Q)_y = \boxed{\quad ④ \quad}$　(3)

となる。したがって合力$\mathbf{F}$のそれぞれの成分は

$F_x =$①+②　(4)

$F_y =$③+④　(5)

となる。ここで変位は小さくθの2次以上は無視すると、$\cos\theta$は1、$\sin\theta$は$\tan\theta$で近似できる。そうすると、

$F_x = 0$　(6)

$F_y = \boxed{\quad ⑤ \quad}$　(7)

となる。

場所xでの弦の接線の傾きは$\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$であるから、これを$\theta(x)$であらわすと

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \boxed{\quad ⑥ \quad} \tag{8}$$

となる。ここで

$$u'(x,t) \equiv \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \tag{9}$$

と定義すると

$$\begin{aligned} F_y &= T\{u'(x+\delta x,t) - u'(x,t)\} \\ &= T\delta x \frac{u'(x+\delta x,t) - u'(x,t)}{\delta x} \xrightarrow{\delta x \to 0} T\delta x \frac{\partial u'(x,t)}{\partial x} \end{aligned} \tag{10}$$

となる。これから式(9)を考慮すると

$$F_y = \boxed{\quad ⑦ \quad} \tag{11}$$

となる。PQの質量は$\sigma\delta x$でありy軸方向の加速度は$\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$であるから、運動方程式は

$$\boxed{\quad ⑧ \quad} \tag{12}$$

となり、

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \boxed{⑨}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{13}$$

を得る。式(13)で$v = \dfrac{1}{\sqrt{\boxed{⑨}}}$とおけば波動方程式(1)を得る。

[III - 2]　次の問いに答えよ。

変位が

$$u(x,t) = G(x - vt) \tag{14}$$

の形で与えられる場合を考える。ここでGは任意の 2 階微分可能な 1 変数関数である。Gの変数$x - vt$をαとおいてGを偏微分することにより、式(14)が波動方程式(1)の解になっていることを示せ。

[III - 3]　次の問いに答えよ。

[III - 2]の問題でGの関数形が$G(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha^2 + 1}$と与えられたとき、時刻$t = 0$と$t = t_1 > 0$のときの変位を、$x$軸を横軸にとってその概形をグラフに描け。

[IV]　(40 点)

圧力 p，体積 V，温度 T の 1 モルの理想気体を考える．また気体定数を R とする．なお，以下で考える状態変化は準静的なものとする．

(1) この気体の温度 T を一定に保ったまま，体積を V_1 から V_2 まで等温膨張させる時，この気体が外になす仕事を求めなさい．

(2) 一般に熱力学の関係式として

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$$

が成り立つ．ここで U は内部エネルギーである．これを使って，この気体を等温膨張させる時に内部エネルギーの変化が 0 であることを示しなさい．

(3) この気体の温度 T を一定に保ったまま，体積を V_1 から V_2 まで等温膨張させる時，この気体が外から受け取る熱量を求めなさい．さらに，この気体のエントロピー S の変化を求めなさい．

(4) 温度一定での体積弾性率（等温体積弾性率）は

$$k_T = -V\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$$

と定義される．この気体の等温体積弾性率 k_T を求めなさい．

(5) この気体を断熱変化 (エントロピー一定の変化) させると，p, V はポアソンの法則 ($pV^\gamma =$ 一定) を満たす．ここで γ は比熱比である．

断熱変化での体積弾性率（断熱体積弾性率）は

$$k_S = -V\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S$$

と定義される．この気体の断熱体積弾性率 k_S を求めなさい．

(6) 一般に気体の密度 ρ, 体積弾性率 k と音速 v の間には

$$v^2 = \frac{k}{\rho}$$

の関係がある．標準状態（0 ℃, 1 気圧）での空気の圧力は $p_0 = 1.0 \times 10^5$ Pa, 密度は $\rho_0 = 1.3\,\mathrm{kg/m^3}$ である．なお，標準状態の空気は理想気体と見なしてよい．

(a) SI 単位系での圧力の単位 [Pa] を，質量 [kg], 長さ [m], 時間 [s] の単位を用いて書き換えなさい．

(b) 等温体積弾性率 k_T を使って，標準状態の空気に対する k_T/ρ の数値を求めなさい．

(c) 空気は近似的に 2 原子分子とみなせるので $\gamma = 1.4$ となる．断熱体積弾性率 k_S を使って，標準状態の空気に対する k_S/ρ の数値を求めなさい．

(d) 標準状態の空気中の音速の実測値は $v_0 = 3.3 \times 10^2\,\mathrm{m/s}$ である．(b),(c) の結果と比較して，音波が熱力学的にどのような過程であるかを考察しなさい．