九州大学理学部物理学科 (物理学コース)

平成２８年度　第３年次編入学試験

物理学

平成２７年７月４日（土）９：００-１２：００

注意事項

（1）試験開始の合図があるまでこの冊子を開かないこと。

（2）問題冊子は表紙を含めて７枚で、問題は[I]から[IV]まである。

（3）解答用紙には、用紙ごとに受験番号と氏名を記入すること。

（4）解答は指定された解答用紙に記入すること。指定された解答用紙であれば、裏面を使って解答してもよい。下書きには問題用紙の余白や裏などを利用し、解答用紙の余白や裏面には下書きをしないこと。

（5）解答用紙に書ききれない場合や、用紙を取り替えたい場合は、試験監督に申し出ること。

（6）問題冊子は持ち帰ってよい。

[I] (80 点)
次の問題に答えなさい。

[I-1] 質量 m の質点が水平な x 軸上を移動している。摩擦を無視する。時刻 t $(t \geq 0)$ での、質点の位置と速度を $x(t)$, $v_x(t)$ とする。質点は、速度の２乗に比例する空気抵抗 $mbv_x^2(t)$ $(b > 0,$ 定数$)$ を受けている。時刻 $t = 0$ における位置を $x = 0$ とし、速度を v_0 $(v_0 > 0)$ とする。

(1) $v_x > 0$ の場合に質点が満たす運動方程式を書け。

(2) 時刻 t での速度 $v_x(t)$ を求めよ。

(3) 時刻 t での位置 $x(t)$ を求めよ。

(4) 前問 (3) の結果は、$t \to \infty$ の極限で、$x(t)$ が無限大に発散することを示している。質点が速度の３乗に比例する空気抵抗 $mcv_x^3(t)$ $(c > 0,$ 定数$)$ を受けている場合を考える。そのとき、$t \to \infty$ の極限で $x(t)$ が有限収束するか、または、無限大発散するか、どちらであるかを選び、判断理由とともに、答えなさい。

次に、質量 m の質点を、時刻 $t = 0$ に、鉛直上方へ放出速度 v_1 で放出する場合を考える。鉛直上方に向かって y 軸を取る。時刻 t $(t \geq 0)$ での、質点の位置と速度を $y(t)$, $v_y(t)$ とする。質点は、速度の２乗に比例する空気抵抗 $mbv_y^2(t)$ $(b > 0,$ 定数$)$ を受けている。時刻 $t = 0$ における位置を $y(0) = 0$ とし、速度を $v_y(0) = v_1$ $(v_1 > 0)$ とする。重力加速度の大きさを g (定数) とする。必要ならば、次の積分公式を使いなさい。

$$\int \mathrm{d}x \ \frac{1}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C, \quad (C\text{ は定数})$$

$$(\tan^{-1} x \text{ は、} \tan x \text{ の逆関数で、} -\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2})$$

(5) 質点に対する運動方程式が $\dfrac{1}{1+(\beta v_y)^2}\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -g$ という形に変形できることを導き、β を g, b を使って表せ。

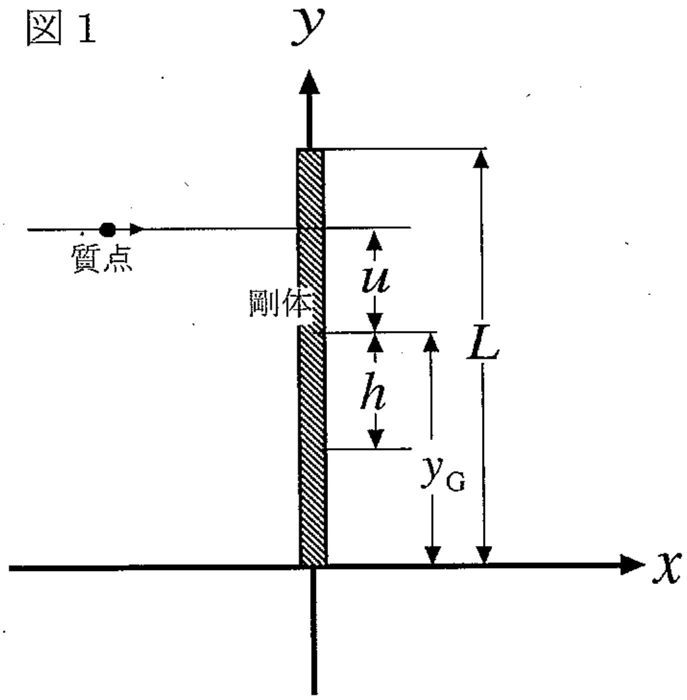
質点は、放出されると上昇し始め、時刻 $t = T$ に最高高度に到達した後、降下し始める。放出速度 v_1 を増加させるにつれて最高高度は高くなる。

(6) 最高高度に達する時刻 T を v_1, g と前問 (5) で定義した β を使って表せ。

(7) 放出速度 v_1 を増加させるにつれて質点の最高高度は高くなるが、最高高度に達する時刻 T には上限 T_s が存在する。T_s を g, b を使って表せ。

[I-2] 図1のように、水平な xy 面内に置かれた、長さが L で、太さを無視できる、質量 M の棒状の剛体を考える。剛体の両端を $(x,y)=(0,0)$, $(0,L)$ の位置に置く。剛体の線密度 ρ は一定ではなく $\rho(y)=\dfrac{\rho_0}{L}y$ (ρ_0 は定数) と表される。重心の位置を $(0,y_{\mathrm{G}})$ とし、重心を通り xy 面に垂直な軸のまわりの慣性モーメントを I とする。剛体と xy 面との間の摩擦を無視する。

図1



(1) 質量 M を ρ_0, L を用いて表せ。

(2) y_{G} を L を用いて表せ。

(3) 慣性モーメント I を ρ_0, L を用いて表せ。

次に、図1のように、x 軸に平行に、x 軸の正の方向に運動する質点が、剛体の $y=y_{\mathrm{G}}+u$ $(0<u<L-y_{\mathrm{G}})$ の位置に弾性衝突した。衝突により作用した力積の大きさを J とする。衝突時間が十分短く、力積の方向は x 軸に平行であるとする。衝突直後、剛体の重心は速度 v_{G} $(v_{\mathrm{G}}>0)$ で x 軸に平行に移動し始め、剛体は重心を中心として角速度の大きさ ω で回転し始める。

(4) v_{G} を J, M を用いて表せ。

(5) ω を J, u, I を用いて表せ。

(6) v_{G} は正であるが、衝突直後、$y=y_{\mathrm{G}}-h$ $(0<h<y_{\mathrm{G}})$ の位置における剛体の速度の x 成分 v_h は必ずしも正ではない。v_h を M, I, J, u, h を用いて表せ。さらに、与えられた u に対して $v_h=0$ となる h が存在するとき、h を L, u を用いて表せ。

[II]　(80 点)

以下の電磁気学の問題では、SI 単位系を用いよ。真空の誘電率を ε_0 とする。

[II-1]　真空中に置いた電気双極子の作る電場、電位について考える。以下の問いに答えよ。

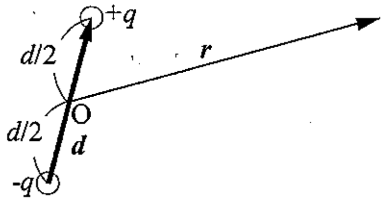


図 2-1

(1) 図 2-1 のように真空中に $+q$ と $-q$ の点電荷を置く。2 つの点電荷の中点を座標の原点 O とし、点電荷 $-q$ から $+q$ へ向かうベクトルを $\boldsymbol{d}$ とする。これら 2 つの点電荷による位置 $\boldsymbol{r}$ での電位 $V(\boldsymbol{r})$ を、ε_0, q, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{d}$ を用いて表せ。電位は無限遠方をゼロとし、必要ならばベクトルの大きさを表す記号 ($|\ldots|$) を用いてよい。

(2) 前問 (1) の結果は $d \ll r$ のとき、電気双極子モーメント $\boldsymbol{p}(= q\boldsymbol{d})$ を用いて

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{i}$$

と近似的に表せることを示せ。ここで、d, r はそれぞれ $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{r}$ の大きさを表す。この際、$\dfrac{d}{r}$ の 2 次以上の項は無視し、$|x| \ll 1$ のとき成り立つ近似式 $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ を用いてよい。

(3) 3 次元デカルト座標で考え、$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{r}$ をそれぞれ $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z)$, $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ とする。これらを式 (i) に代入して、前問 (2) の近似に対応した電場 $\boldsymbol{E}$ の x, y, z 成分を求めることによって、

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{3(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r})}{r^5}\boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{p}}{r^3} \right\} \tag{ii}$$

であることを示せ。

(4) 原点 O を中心とする半径 $a (a \gg d)$ の球面を閉曲面 S_0 とし、S_0 上の微小面積 dS の法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$(ただし、球の外向きを正にとる。) とする。式 (ii) の電場 $\boldsymbol{E}$ について、以下の面積分を計算せよ。(その過程も示せ。)

$$\int_{\mathrm{S}_0} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS$$

その際、$\boldsymbol{p}$ は z 軸に平行であるとして計算してよい。更に、この計算結果の物理的な意味を答えよ。

[II-2] コンデンサーと抵抗を図 2-2 のように配線した回路について考える。以下の問いに答えよ。

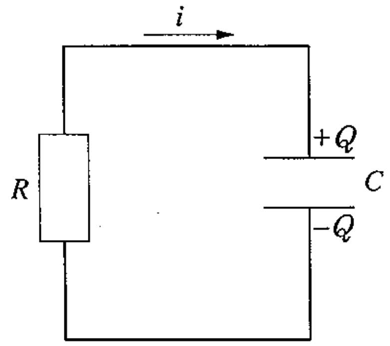


図 2-2

(1) 回路 1 周分の電圧降下を考えて、コンデンサーに蓄えられている電荷 Q(図のように符号をとる) を、コンデンサーの静電容量 C、抵抗 R、回路に流れる電流 i を用いて表せ。ここで、i は図に示す方向を正とせよ。また、回路のループによる自己インダクタンスの効果は無視できるとして考えよ。

(2) 電荷 Q と電流 i の関係を前問 (1) の結果に代入して、Q に関する微分方程式を求めよ。さらに初期条件 (時刻 $t = 0$ のとき $Q = Q_0$) を用いて、Q を時刻 t の関数として求めよ。

(3) Q と t の関係をグラフで表せ。この際、$t = 0,\ RC,\ 2RC$ における Q の値をグラフに書き込むこと。

(4) $t = 0 \sim \infty$ の間に抵抗で発生するジュール熱の値を求めよ。(計算過程も示せ。)

(5) R が小さい場合には回路のループによる自己インダクタンスの効果が無視できなくなる。R が十分小さい場合に問 (2) と同じ初期条件でコンデンサーの電荷の放電を始めると、Q の振舞いはどう変わるか？定性的かつ簡潔に答えよ。

[III]　（40 点）光の屈折現象に関する以下の問いに答えよ。

光は、「空間的距離と屈折率の積として定義される光学的距離が最短の経路を進む。」という「フェルマーの原理」に従う。この原理を、図 3.1 のように屈折率 n_1 の媒質と n_2 の媒質が平らな境界面で接する場合に適用し、紙面内で固定された点 A から点 B に至る光路を求めてみよう。

(1) 図 3.1 の光路 AO'B の光学的距離 l を n_1, n_2, a, b, c, u を用いて表せ。

(2) l が最小となるとき、u が満たす関係式を求めよ。ただし、u を具体的に求める必要はない。また、この l が最小となる光路を AOB として、図 3.1 のように光路 AO および光路 OB が境界面の法線となす角を各々、θ_1、θ_2 とすると、$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$ が成り立つことを示せ。

次に、屈折率が図 3.1 の境界面に垂直な方向に連続変化する媒質中での光路について考える。この場合には、光路に沿って、媒質の各点での屈折率 n と、光路の接線と境界面の法線とのなす角 θ の間には「$n \sin\theta =$ 一定」の関係が成立する。

以下では、図 3.2 に示すように十分細いレーザー光が、空気中（$x < 0$ の領域）から、屈折率 n が y 軸方向に連続変化する媒質（$x > 0$ かつ $|y| < W_0$ の領域）に原点 O で入射する場合を考える。媒質の n は、y 座標のみに依存して、$n(y) = n_0\sqrt{1-\beta^2 y^2}$ (n_0, β: 定数) で与えられる。また、光線は xy 面内にあり、$|y| < W_0$ の領域から出ないものとする。なお、$n(\pm W_0) > 1$ とする。

(3) 光路の接線と x 軸とのなす角を α とし、その位置での媒質の屈折率を n とすると、光路上では $n\cos\alpha = C$（C は定数）が成り立つ。図 3.2 に示すように原点 O で $\alpha = \alpha_0$ とするとき、C を求めよ。

(4) 光路上の点 (x,y) における光路の接線の傾きが $\tan\alpha = dy/dx$ で与えられること、および前問 (3) の関係式を用いると、光路上の点 (x,y) は、$d^2y/dx^2 = -Ay$（A は定数）の微分方程式を満たすことが示せる。A を α_0, β を用いて表せ。

(5) 前問 (4) の微分方程式を解き、光路 $y(x)$ を求めよ。必要なら、前問 (4) の A を用いてもよい。

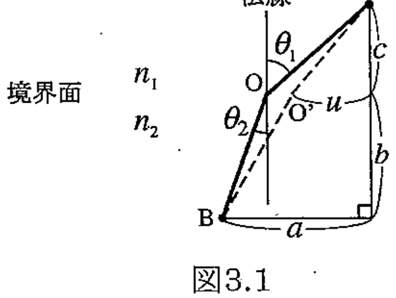


図3.1

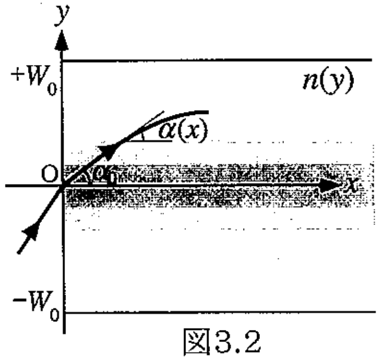


図3.2

[IV] （40 点）圧力 p, 体積 V, 温度 T の下にある系について以下の各問いに答えよ。

(1) 熱力学第一法則を用いて、系の内部エネルギーを U、系のエントロピーを S として、

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - p$$

が成り立つことを示せ。

(2) ヘルムホルツの自由エネルギー $F(T, V) = U - TS$ を用いて、

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$$

の関係が成り立つことを示せ。

以下では、圧力 p、体積 V、温度 T の状態のもとで単位体積当たりの内部エネルギー U/V が T のみに依存し、かつ、$U = 3pV$ で与えられる気体を考える。

(3) 問 (1)、(2) の結果を用いて、温度 T においてこの気体の圧力 p が $p = aT^4$（a は正の定数）で与えられることを示せ。

(4) この気体のエントロピー S を求めよ。

(5) この気体を温度 T_1 で体積を V_1 から V_2（$V_2 > V_1$）まで準静的に等温膨張させた際に気体のする仕事 W_A と吸収する熱量 Q_A を $\underline{T_1, V_1, V_2, a}$ で表せ。

(6) この気体を温度 T_1、体積 V_1 から温度 T_2、体積 V_3 まで準静的に断熱膨張させた際に気体のする仕事 W_B を $\underline{V_1, V_3, T_1, a}$ で表せ。