令和８年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学 [I] (125 点)　令和７年８月 25 日 (月)　13:00 – 14:20

注意事項

1. 問題冊子は指示があるまで開かないこと。
2. 問題冊子はこの表紙を含めて 5 頁 (空白の頁を除く)，解答紙は 2 枚である。
3. すべての解答紙に受験番号を記入すること。
4. 大問ごとに指定された解答紙に解答すること。ただし，指定された解答紙の裏面も使ってよい。
5. 問題冊子は持ち帰ること。

物理学 [I]

変数 $q(t)$ の時刻 t における時間微分はニュートン記法を用いて $\dot{q}(t)$ と略記する。また, 解答においては変数 $q(t)$ の括弧付きの引数の (t) を省いて q と略記してよい。

[I-A]

図 1 のように質量 μ で長さが $2L$ の一様な棒の両端に, 質量 m_1, m_2 の小球を固定した。$m_2 > m_1$ とし, 小球の大きさは無視できるものとする。棒の中央にねじりばかり（ねじりばね定数 k）が取り付けられている。棒の中央を原点, z 軸の負の向きを鉛直下向きにとる。棒は x 軸まわりに y-z 面内のみを運動する。棒と y 軸のなす角度を反時計回りを正として θ とする。このとき, ねじりばかりによるトルクは棒全体で $-k\theta$ であり, 復元力としてはたらく。ただし, 棒が水平を向いているとき（$\theta = 0$）をねじりばかりの自然位置とする。鉛直下向きにはたらく重力加速度の大きさを g とする。

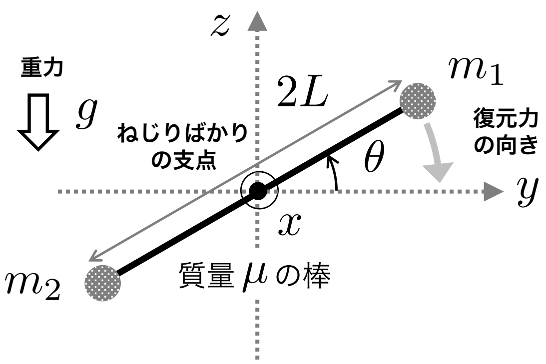


図 1. 鉛直面内の回転を調べるためのねじりばかりの模式図

問 1. 棒が角度 θ_0 で静止しているとき, トルクのつり合いの式を立てよ。

問 2. 棒と小球を合わせた系の x 軸周りの慣性モーメント I を求めよ。

以下では, 解答に棒と小球をあわせた系の慣性モーメント I を用いよ。

問 3. 棒の回転角 $\theta(t)$ に対する運動方程式を答えよ。

問 4. 運動方程式を用いて棒と小球とねじりばかりを合わせた系の力学的エネルギーが保存することを示せ。

問 5. 棒のつり合い位置 θ_0 からの微小な揺らぎ $\delta\theta(t) = \theta(t) - \theta_0$ を考える。$\delta\theta(t)$ の 1 次までを保つ近似で $\delta\theta(t)$ の満たす関係式を求めよ。

問 6. 棒のつり合い位置からの微小な揺らぎ $\delta\theta(t)$ の振動周期を T とする。ねじりばね定数 k を $m_1, m_2, g, I, L, \theta_0, T$ を用いて表せ。

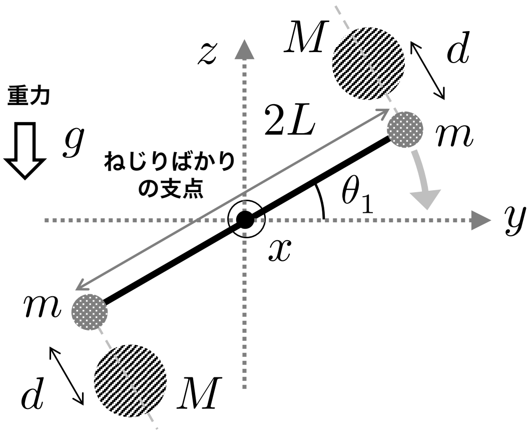


図 2. 万有引力定数を求めるための実験の模式図

以下では, 2 つの小球の質量は等しい ($m_1 = m_2 = m$) とし, 棒の質量は無視できる ($\mu = 0$) ものとする。図 2 のように, それぞれの小球のそばに, 質量が M の大球を yz 平面上に固定した。このとき, 大球とそのすぐそばにある小球の間の万有引力によるトルクとねじりばかりによる復元トルクがつり合った。ねじりばかりは自然位置から微小な角度 θ_1 だけずれ, 大球とそのすぐそばにある小球の間の距離は $d\,(\ll L)$ となった。つり合いの位置では大球と小球を結ぶ直線は棒と直交している。大球の大きさと, 大球と遠い方の小球の間にはたらく万有引力によるトルクは無視できるものとする。

問 7. つり合いの位置のまわりの微小振動について測定を行ったところ, $m = 0.70$ kg, $M = 100$ kg, $L = 1.0$ m, $I = 1.4\ \mathrm{kg \cdot m^2}$, $d = 0.20$ m, $\theta_1 = 0.015$ のとき, $T = 31.4$ 分であった。万有引力定数 $G\,[\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}]$ を有効数字 2 桁で求めよ。ただし, 円周率は 3.14 とせよ。

[I-B]

図3のように, 長さが ℓ で, 伸び縮みせず質量の無視できる糸で, 質量 m の質点が原点から吊るされている。質点は z 軸からわずかにずれた位置を中心に振動している。以下では重力加速度は z 軸負の向きで, その大きさを g とする。

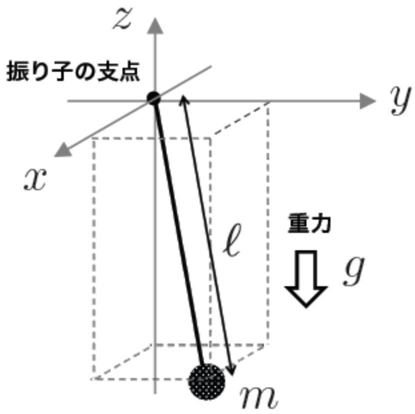


図 3. 球面振り子の図

問 1. 質点は伸び縮みしない糸でつながれているため質点の z 座標は $x(t), y(t)$ を用いてあらわすことができる。微小振動 $|x|, |y| \ll \ell$ を仮定したときの z 座標を x および y の 2 次までで求めよ。

問 2. 微小振動で近似した振り子のラグランジアンを $x(t), y(t)$ を用いて表せ。ただし, 問 1 で求めた関係より $\dot{z}(t)$ は, $\dot{x}(t)$ と $\dot{y}(t)$ に比べて十分に小さいため, z 方向の速度による運動エネルギーは無視せよ。

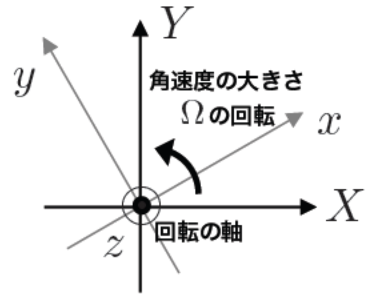


図 4. 回転座標系と慣性系の関係を示す図

次に, この振り子の支点が z 軸周りに一定の角速度の大きさ $\Omega(>0)$ で回転する円盤の上にあるとする。この回転座標系の振り子の運動を慣性系（円盤の外から眺める系）から考察する。図 4 のように, 回転座標系 (x, y) と慣性系 (X, Y) は原点を共有するように選び, 時刻 $t = 0$ では x 軸・y 軸は, それぞれ X 軸・Y 軸と一致していたとする。したがって, 慣性系における質点の座標 $\big(X(t), Y(t)\big)$ と回転座標系における質点の座標 $\big(x(t), y(t)\big)$ は, 次の関係を満たす。

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = R(t) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad R(t) = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) \\ \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) \end{pmatrix}.$$

問 3. 慣性系における速度ベクトル $\big(\dot{X}(t), \dot{Y}(t)\big)$ を $x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)$ を用いて表せ。

問 4. 慣性系における質点の運動エネルギーを $x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)$ を用いて求めよ。

問 5. 微小振動で近似した重力ポテンシャルを含めて, 自由度 $x(t)$ と $y(t)$ に対応するオイラー・ラグランジュ方程式を求めよ。

問 6. $g/\ell > \Omega^2$ が成り立つとき, 問 5 で得られた連立微分方程式は α, β を実数のパラメータとして, 以下の形をとる。

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\alpha\,\dot{y} + \beta^2\,x = 0 \\ \ddot{y} + 2\alpha\,\dot{x} + \beta^2\,y = 0 \end{cases}.$$

変数 $w_\pm(t) = x(t) \pm i\,y(t)$ を導入すると, $w_\pm(t)$ のそれぞれに対する 2 階微分方程式に帰着される。β^2 に対して α^2 を無視する近似で, 微分方程式の一般解が以下で与えられることを示せ。ただし, $A_\pm, B_\pm$ は初期条件で決まる任意定数とする。

$$w_+(t) \approx e^{-i\alpha t}\big(A_+\cos(\beta t) + B_+\sin(\beta t)\big), \quad w_-(t) \approx e^{+i\alpha t}\big(A_-\cos(\beta t) + B_-\sin(\beta t)\big).$$

問 7. $|\alpha| \ll |\beta|$ が成り立つとき, 初期条件 $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ を仮定すると任意定数は $A_+ = A_- = x_0$, $B_+ = -B_- = i(\alpha/\beta)x_0 \approx 0$ と求まる。このときの $x(t)$ と $y(t)$ を求め, 振り子の運動の様子を説明せよ。

令和８年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学 [II] (125点)　令和７年８月25日(月)　14:40 – 16:00

注意事項

1. 問題冊子は指示があるまで開かないこと。
2. 問題冊子はこの表紙を含めて 5 頁 (空白の頁を除く)，別紙 1 枚，解答紙は 2 枚である。
3. すべての解答紙に受験番号を記入すること。
4. 大問ごとに指定された解答紙に解答すること。ただし，指定された解答紙の裏面も使ってよい。
5. 問題冊子，別紙は持ち帰ること。

物理学 [II]

別紙に記載の内容を必要に応じて用いてよい。

[II-A]

図 1 のように，真空中に置かれた無限に長い同軸ケーブルを考える。内側の導線の半径を a とする。外側の円筒導体の半径を b とし，円筒の厚さは無視できるものとする。円筒導体と導線の間は真空であるとする。

図 1 のように円筒座標 (r, θ, z) を取って考えることにする。内側の導線には z 軸正の向きに大きさ I の電流が，外側円筒には z 軸負の向きに大きさ I の電流が流れている。電流は時間変化しないため，各導体に帯電している面電荷密度は一定である。内側の導線には z 方向の単位長さあたり電荷 $\lambda(>0)$ が，外側の円筒導体には z 方向の単位長さあたり電荷 $-\lambda$ が一様に分布しているものとする。真空の誘電率を ε_0, 真空の透磁率を μ_0 とする。

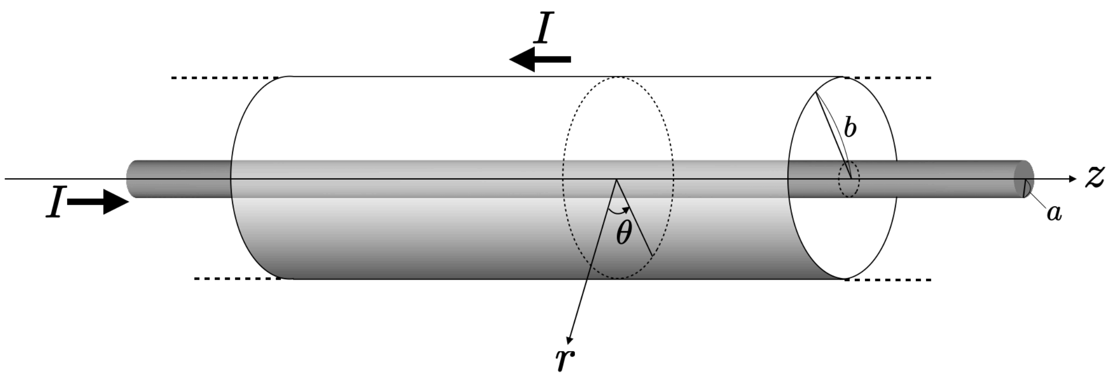


図 1

問 1. 中空部分の点 (r, θ, z) における電場 $\boldsymbol{E}$ の r 成分を答えよ。答えのみでよい。

問 2. 中空部分の点 (r, θ, z) における磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の θ 成分を答えよ。答えのみでよい。

問 3. 外側の円筒導体に対する内側の導線の電位 V を求めよ。

問 4. 別紙の Maxwell 方程式をもとに，電磁エネルギー密度 $u = \frac{1}{2}\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} + \frac{1}{2}\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B}$ とポインティングベクトル $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ の間に保存則

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = -\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} \tag{1}$$

が成り立つことを示せ。ここで $\nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H})$ を用いてよい。

問 5. 中空部分のポインティングベクトル $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ を求めよ。ただし，円筒座標系 (r, θ, z) での r, θ, z 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_z$ とし，$\boldsymbol{P} = P_r\boldsymbol{e}_r + P_\theta\boldsymbol{e}_\theta + P_z\boldsymbol{e}_z$ の形で答えよ。

問 6. 中空部分の断面を通過する電力 P_s は問 5 のポインティングベクトル $\boldsymbol{P}$ を断面上で面積分することで得られる。P_s を求め，V と I を使って表せ。

問 7. z 方向の単位長さあたりの，同軸ケーブルの中空部分に蓄えられるエネルギー密度 u_s を求めよ。

問 8. 同軸ケーブルの中空部分のエネルギーが伝わる速さ v_s を求めよ。

問 9. v_s が真空中の光速を超えないことを示せ。

[II-B]

真空中で，図 2 に示されるような六重極磁石がつくる，時間的に変化しない磁場を考える。六重極磁石は z 軸方向に十分長く，磁場は z 軸方向に一様であるとする。自由電荷，自由電流，電場はないものとする。

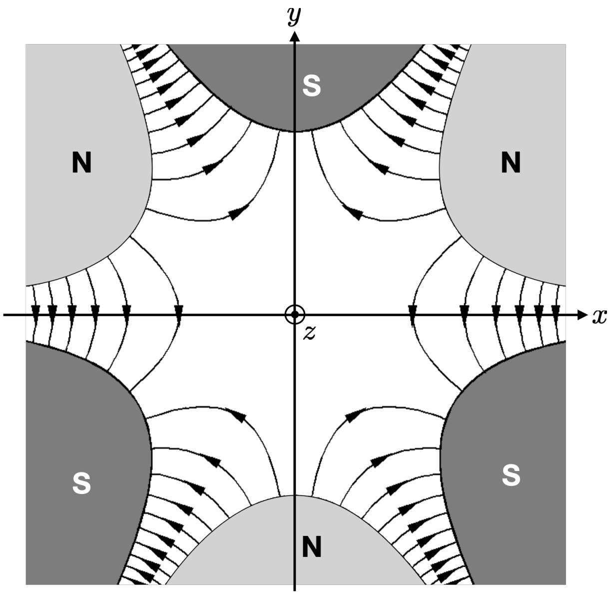


図 2

問 1. クーロンゲージ $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ の下でベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ がラプラス方程式 $\nabla^2\boldsymbol{A}=0$ を満たすことを示せ。ここで，$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$ であることを用いてよい。

問 2. 図 2 に示す z 軸を対称軸とする円筒座標系 (r,θ,z) を考える。ここで $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ である。今，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ はその円筒座標系において z 成分のみをもち，$\boldsymbol{A}=A_z\boldsymbol{e}_z=R(r)Y(\theta)\boldsymbol{e}_z$ と表されるとする。この時，$R(r)$ と $Y(\theta)$ それぞれが満たすべき方程式をラプラス方程式 $\nabla^2\boldsymbol{A}=0$ から導け。

問 3. ラプラス方程式 $\nabla^2\boldsymbol{A}=0$ の解のうち，図 2 の磁力線を与えるベクトルポテンシャルのひとつとして以下では

$$A_z=\frac{B_0}{3r_0^2}r^3\cos(3\theta) \tag{2}$$

を考える (ただし $r_0>0$)。このベクトルポテンシャルが与える磁場は六重極磁場と呼ばれる。x,y,z 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$ として，この時の磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を $\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{e}_x+B_y\boldsymbol{e}_y+B_z\boldsymbol{e}_z$ の形で求めよ。ただし，各成分 B_x,B_y,B_z には，r,θ を用いずに，x,y,z から必要なものを使って表すこと。

ここから，問３で求めた磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の磁場中を運動する質量 m で磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ を有する中性粒子の運動を考えよう。粒子の軌道は磁石の大きさより十分小さく，粒子は問３で求めた理想的な六重極磁場中を運動するものとする。粒子は磁場中を十分ゆっくり進むために，磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ は，各局所磁場における磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の向きの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_B$ を用いて

$$\boldsymbol{\mu} = \mu_{\mathrm{i}} \boldsymbol{e}_B$$

と表わせるものとする。なお，粒子は時刻 $t = 0$ において原点 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ を初期速度 $\boldsymbol{v} = v_1 \cos\theta_0 \boldsymbol{e}_x + v_1 \sin\theta_0 \boldsymbol{e}_y + v_2 \boldsymbol{e}_z$ で出発するものとする。ただし，$v_1 > 0, v_2 > 0$ とする。また，$B_0 > 0$ とする。

問 4. 磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ が磁場から受けるポテンシャルエネルギーは

$$U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B} \tag{3}$$

である。粒子の位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ に関する運動方程式を示せ。

問 5. 問４で得た運動方程式を解き，$x(t), z(t)$ を求めよ。また，軌道の概形を $\mu_{\mathrm{i}} > 0$,$\mu_{\mathrm{i}} < 0$ それぞれの場合について xz 平面上に図示せよ。

問 6. $\mu_{\mathrm{i}} > 0$ または $\mu_{\mathrm{i}} < 0$ いずれかの場合に，再度 $(x, y) = (0, 0)$ となる位置へ到達することがある。それは $\mu_{\mathrm{i}} > 0$ と $\mu_{\mathrm{i}} < 0$ のどちらの場合であるかを答え，粒子が初めて再び $(x, y) = (0, 0)$ に戻る時の z 座標 $z_{\mathrm{f}} (\neq 0)$ を求めよ。

別紙　(物理学 [II])

Maxwell 方程式

電場を $\boldsymbol{E}$，電束密度を $\boldsymbol{D}$，磁場を $\boldsymbol{H}$，磁束密度を $\boldsymbol{B}$，電荷密度を ρ，電流密度 $\boldsymbol{j}$ とすると，Maxwell 方程式は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{A1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{A2}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{A3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \tag{A4}$$

で与えられる。

円筒座標系

円筒座標系 (r, θ, z) での r, θ, z 方向の基底ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_z$ とすると，任意のスカラ量 f およびベクトル量 $\boldsymbol{A} = A_r \boldsymbol{e}_r + A_\theta \boldsymbol{e}_\theta + A_z \boldsymbol{e}_z$ に対して次が成り立つ。

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \tag{A5}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{A6}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\boldsymbol{e}_z \tag{A7}$$

$$\Delta f = \nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{A8}$$

また，

r 方向に垂直な微小面積要素:　$dS = r d\theta dz$

θ 方向に垂直な微小面積要素:　$dS = dr dz$

z 方向に垂直な微小面積要素:　$dS = r dr d\theta$

微小体積要素:　$dV = r dr d\theta dz$

である。

令和8年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学 [III] (125点)　令和7年8月25日(月)　16:20 – 17:40

注意事項

1. 問題冊子は指示があるまで開かないこと。
2. 問題冊子はこの表紙を含めて 6 頁 (空白の頁を除く)，解答紙は 2 枚である。
3. すべての解答紙に受験番号を記入すること。
4. 大問ごとに指定された解答紙に解答すること。ただし，指定された解答紙の裏面も使ってよい。
5. 問題冊子は持ち帰ること。

物理学 [III]

以下，i は虚数単位，$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったもの，$[\hat{X}, \hat{Y}] = \hat{X}\hat{Y} - \hat{Y}\hat{X}$ とする。

[III-A]

2 準位系の量子力学を考える。以下では，規格化された 2 つの状態ベクトル $|1\rangle$，$|2\rangle$ を用い，これらが列ベクトル,

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

で表される基底を取る。また，以下の 2×2 行列を用いる:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

問 1. この系の時刻 t におけるハミルトニアンを $\mathcal{H}(t)$，状態ベクトルを $|\varphi(t)\rangle$ とする。$|\varphi(t)\rangle$ の時間発展を決めるシュレディンガー方程式を答えよ。

問 2. 任意の状態ベクトル $|\varphi(t)\rangle$ は，2 つの複素パラメータ $\alpha_1(t)$ と $\alpha_2(t)$ を用いて以下のように表すことができる:

$$|\varphi(t)\rangle = \alpha_1(t)|1\rangle + \alpha_2(t)|2\rangle.$$

状態ベクトル $|\varphi(t)\rangle$ は規格化されており，$|\alpha_1(t)|^2 + |\alpha_2(t)|^2 = 1$ を満たすものとする。このとき，時刻 t において状態ベクトル $|\varphi(t)\rangle$ を測定して状態 $|1\rangle$ を観測する確率 $P_1(t)$ を答えよ。答えのみでよい。

問 3. 以下では，回転する磁場中のスピンを記述するハミルトニアン

$$\mathcal{H}(t) = \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_3 + \frac{\hbar\rho}{2}[\cos(\gamma t)\sigma_1 + \sin(\gamma t)\sigma_2],$$

を考えよう。ここで，ω，ρ，γ はいずれも実定数である。このとき，$\alpha_1(t)$ と $\alpha_2(t)$ は次のような連立微分方程式を満たす:

$$\dot{\alpha}_1(t) = \boxed{\text{ア}}\,\alpha_1(t) + \boxed{\text{イ}}\,\alpha_2(t),$$
$$\dot{\alpha}_2(t) = \boxed{\text{ウ}}\,\alpha_1(t) + \boxed{\text{エ}}\,\alpha_2(t),$$

ここで $\dot{f}(t) = \frac{df(t)}{dt}$ である。$\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$ にあてはまる量を答えよ。答えのみでよい。

問 4. 次のように $\beta_1(t)$，$\beta_2(t)$ を定義する:

$$\beta_1(t) = e^{i\gamma t/2}\alpha_1(t), \qquad \beta_2(t) = e^{-i\gamma t/2}\alpha_2(t).$$

このとき，$\beta_1(t)$，$\beta_2(t)$ に対して，

$$\begin{pmatrix} \dot{\beta}_1(t) \\ \dot{\beta}_2(t) \end{pmatrix} = -i\hat{M} \begin{pmatrix} \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \end{pmatrix}, \tag{III-1}$$

という連立微分方程式が成り立つ。ここで，$\hat{M}$ は時間に依らない 2×2 行列であり，$\Delta = \gamma - \omega$ および ρ に依存する。$\hat{M}$ の具体的な形を導出せよ。なお，$\hat{M}$ の最終的な表式は Δ および ρ を用いて書くこと。

問 5. **以下では $\Delta = 0$ の場合を考える。** 式 (III-1) を解き，$\alpha_1(t)$ と $\alpha_2(t)$ を求めよ。なお，

$$\beta_1(0) = \alpha_1(0), \qquad \beta_2(0) = \alpha_2(0),$$

という初期条件を用いること。また，必要な場合は以下の公式を用いてよい:

$$e^{-i\theta\sigma_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\theta\sigma_1)^n}{n!} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -i\sin\theta \\ -i\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

ここで θ は実数である。

[III-B]

x–y 平面上で 2 次元運動する電荷 q，質量 M の荷電粒子の量子力学を考える。系は x，y 方向それぞれに対して周期的で，その周期は共に L とする。2 次元の位置座標演算子を $\hat{\boldsymbol{x}} = (\hat{x}, \hat{y})$，運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{p}} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y)$，ベクトルポテンシャルを $\hat{\boldsymbol{A}} = (A, B\hat{x})$ とする。ここで A，B は定数である。運動量演算子は x と y の任意の関数 $f(x, y)$ に対して,

$$\hat{p}_x f(x,y) = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y), \qquad \hat{p}_y f(x,y) = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y),$$

と作用する。定常状態の波動関数を $\varphi(x, y)$ とし，この系のハミルトニアン $\hat{H}$ が,

$$\hat{H} = \frac{1}{2M}\left(\hat{\boldsymbol{p}} - q\hat{\boldsymbol{A}}\right)^2 = \frac{1}{2M}\left[(\hat{p}_x - qA)^2 + (\hat{p}_y - qB\hat{x})^2\right], \tag{III-2}$$

で与えられるものとする。この系において B は x–y 平面に直交する方向の磁場の強さに対応している。以下で見るように，系のエネルギースペクトルは $B = 0$ と $B \neq 0$ のときとで大きく異なる。

まず $B = 0$，すなわち磁場が無い場合を考える。

問 1. 波動関数 $\varphi(x, y)$ が，以下のように周期的境界条件を満たす場合を考える:

$$\varphi(x+L, y) = \varphi(x, y), \qquad \varphi(x, y+L) = \varphi(x, y).$$

この $\varphi(x, y)$ は次のようにフーリエ級数展開ができる:

$$\varphi(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{m,n} e^{i\frac{2\pi m}{L}x} e^{i\frac{2\pi n}{L}y}, \tag{III-3}$$

ここで m，n は整数であり，$c_{m,n}$ は m, n でラベルされる展開係数である。この展開係数は,

$$c_{m,n} = \int_0^L dx \int_0^L dy \boxed{\text{あ}} \varphi(x,y),$$

と書ける。$\boxed{\text{あ}}$ にあてはまる量を答えよ。答えのみでよい。

問 2. 式 (III-3) は，m, n でラベルされる波動関数

$$\varphi_{m,n}(x,y) = c_{m,n} e^{i\frac{2\pi m}{L}x} e^{i\frac{2\pi n}{L}y},$$

の重ね合わせと見なせる。波動関数 $\varphi_{m,n}(x, y)$ はハミルトニアン $\hat{H}$ の固有関数である。$\varphi_{m,n}(x, y)$ に対応するエネルギー固有値 $E_{m,n}$ を答えよ。答えのみでよい。

問 3. $A = \pi\hbar/(qL)$ の場合に，次を示せ。

(1) 基底状態のエネルギー固有値 $E_{m,n}$，およびそのエネルギーを与える整数の組 (m,n) の全ての値。

(2) 第一励起状態のエネルギー固有値 $E_{m,n}$，およびそのエネルギーを与える整数の組 (m,n) の全ての値。

次に $B \neq 0$，すなわちゼロでない磁場がある場合を考える。以下では $qB > 0$ と仮定する。また，

$$\hat{\Pi}_x = \hat{p}_x - qA, \qquad \hat{\Pi}_y = \hat{p}_y - qB\hat{x},$$

という記法を用いる。これらはエルミート演算子である。以下で見るように，系が周期性を持つことで B の値は離散化される。それゆえ，ここからの議論は，$B \to 0$ へと連続的に変形することはできないことに注意せよ。

問 4. $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ を満たす $\hat{a}$ ($\hat{a}^\dagger$) を消滅演算子 (生成演算子) と呼ぶ。ここで，$\hat{a}^\dagger$ は $\hat{a}$ のエルミート共役を表す。いま，正の実数 C と $\hat{\Pi}_x$，$\hat{\Pi}_y$ を用いて，$\hat{a} = C(\hat{\Pi}_x + i\hat{\Pi}_y)$ のように消滅演算子を構成できる。このときの C (> 0) を求めよ。

問 5. ハミルトニアン $\hat{H}$ の固有値を導出せよ。なお，解答の際に演算子 $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ の固有値が 0 以上の整数であることを用いてよい。

問 6. B の値が離散化されていることを確認するために，波動関数が満たす性質を調べよう。いま，波動関数 $\varphi(x,y)$ はエネルギー固有状態で，$\hat{H}|_x\varphi(x,y) = E\varphi(x,y)$ を満たすものとする。 ここで，$\hat{H}|_{x'}$ は式 (III-2) の $\hat{H}$ において $\hat{x}$ を x' に置きかえたものである。系の周期性より，(x,y)，$(x+L,y)$，$(x,y+L)$ という 3 つの点における波動関数は位相を除いて等しく，実関数 $g(x,y)$ および $h(x,y)$ を用いて

$$\varphi(x+L,y) = e^{ig(x,y)}\varphi(x,y), \qquad \varphi(x,y+L) = e^{ih(x,y)}\varphi(x,y), \tag{III-4}$$

と書ける。このとき，エネルギー固有値を与える以下の 3 つの表式

$$\frac{\hat{H}|_x\varphi(x,y)}{\varphi(x,y)} = \frac{\hat{H}|_{x+L}\varphi(x+L,y)}{\varphi(x+L,y)} = \frac{\hat{H}|_x\varphi(x,y+L)}{\varphi(x,y+L)},$$

を比較することで，次の方程式を得ることができる：

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = \boxed{\text{い}}, \quad \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = \boxed{\text{う}}, \quad \frac{\partial h(x,y)}{\partial x} = \boxed{\text{え}}, \quad \frac{\partial h(x,y)}{\partial y} = \boxed{\text{お}}.$$

$\boxed{\text{い}}$, $\boxed{\text{う}}$, $\boxed{\text{え}}$, $\boxed{\text{お}}$ を導出し，方程式を満たす $g(x,y)$ と $h(x,y)$ を答えよ。

問 7. 式 (III-4) は，位置 (x,y) の波動関数を平行移動させたときに生じる位相を表している。位置 $(x+L,y+L)$ における波動関数 $\varphi(x+L,y+L)$ は，

- $\varphi(x, y)$ を $(x, y) \to (x + L, y) \to (x + L, y + L)$ と平行移動させたもの
- $\varphi(x, y)$ を $(x, y) \to (x, y + L) \to (x + L, y + L)$ と平行移動させたもの

という 2 通りの見方ができる。このことと前問の結果を用いて，B の値が離散化されていることを示し，許される B の値を求めよ。なお，$qB > 0$ であることに注意せよ。

令和８年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学 [IV] (125 点)　令和 7 年 8 月 26 日 (火)　9:00 – 10:20

注意事項

1. 問題冊子は指示があるまで開かないこと。
2. 問題冊子はこの表紙を含めて 6 頁 (空白の頁を除く)，別紙 1 枚，解答紙は 2 枚である。
3. すべての解答紙に受験番号を記入すること。
4. 大問ごとに指定された解答紙に解答すること。ただし，指定された解答紙の裏面も使ってよい。
5. 問題冊子，別紙は持ち帰ること。

物理学 [IV]

別紙の内容を参考にして，以下の問題に答えよ。ボルツマン定数を k_{B}，プランク定数を h，アボガドロ定数を N_{A} で表す。

[IV-A]

一定の体積 V の 3 次元領域内を運動する N 個の球形粒子が温度 T の熱平衡状態にあるとする。球形粒子は，すべて等しく質量 m と直径 σ をもち，区別できない。また，粒子が互いに重なり合うことは許されず，粒子の中心間距離 r は，図 1 に示すような 2 粒子が接するときの値 σ よりも短くならない。すなわち，2 粒子間のポテンシャルエネルギーは，r を変数として

$$\phi(r) = \begin{cases} 0 & (r \geq \sigma \text{のとき}) \\ \infty & (r < \sigma \text{のとき}) \end{cases}$$

である。粒子の自転は考慮しないとする。

系の分配関数 $Z(T,V,N)$ は，i 番目の粒子の中心位置 $\boldsymbol{r}_i$ と運動量 $\boldsymbol{p}_i$ を用いて，位置に関する積分 $Q(T,V,N)$ と運動量に関する積分 $K(T,N)$ に分離した形式

$$\begin{aligned} Z(T,V,N) &= \frac{1}{N!h^{3N}}\, Q(T,V,N)\ K(T,N) \\ Q(T,V,N) &= \int_V \cdots \int_V \exp\left[-\frac{1}{k_{\mathrm{B}}T}\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\phi(|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|)\right] d\boldsymbol{r}_1\cdots d\boldsymbol{r}_N \\ K(T,N) &= \int\cdots\int \exp\left[-\frac{1}{2mk_{\mathrm{B}}T}(|\boldsymbol{p}_1|^2+\cdots+|\boldsymbol{p}_N|^2)\right] d\boldsymbol{p}_1\cdots d\boldsymbol{p}_N \end{aligned}$$

で表すことができる。

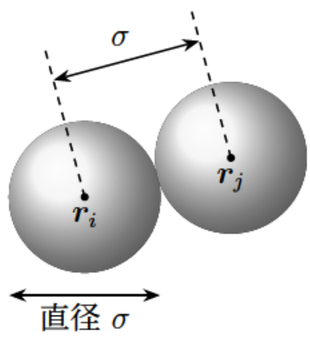


図 1

問 1. つぎの手順で，位置に関する積分 $Q(T,V,N)$ を 1 番目の粒子から 1 つ 1 つ順番に計算する。

(1) 粒子が 1 つも入っていない体積 V の領域に，1 番目の粒子のみを配置する。このとき，1 番目の粒子の中心座標 $\boldsymbol{r}_1$ に関する積分は，理想気体分子と同じように $\int_V d\boldsymbol{r}_1 = V$ となる。

(2) つぎに，すでに 1 番目の粒子が配置されている条件下で，2 番目の粒子を追加する。1 番目の粒子が置かれた $\boldsymbol{r}_1$ を中心とする半径 σ の球の領域内は，$\phi(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|)=\infty$ となって，他の粒子の中心が入れない排除体積である。その体積を $a = \dfrac{4}{3}\pi\sigma^3$ と表すと，2 番目の粒子の中心 $\boldsymbol{r}_2$ を配置できる領域は，$V-a$ に限られる。$\boldsymbol{r}_2$ に関する積分は $V-a$ となる。ここで，$\boldsymbol{r}_1$ が系の境界近傍に配置され，排除体積が a よりも小さくなる場合の寄与を無視できるくらい小さいとした。

(3) すでに 2 つの粒子が配置されている条件下で，3 番目の粒子を追加する。1 番目の粒子が置かれた $\boldsymbol{r}_1$ を中心とする半径 σ の球の領域内と，2 番目の粒子が置かれた $\boldsymbol{r}_2$ を中心とする半径 σ の球の領域内は，他の粒子の中心が入れない排除体積である。$\boldsymbol{r}_1$ と $\boldsymbol{r}_2$ が十分離れるくらいに低い粒子密度 $Na \ll V$ において，2 つの領域に重複はなく，$\boldsymbol{r}_3$ に関する積分は $V-2a$ となる。

(4) 繰り返して，すでに $N-1$ 個の粒子が配置されている条件下で，N 番目の粒子を追加する。各粒子のつくる排除体積に重複がない程度に低い粒子密度において，$\boldsymbol{r}_N$ に関する積分は $\boxed{①\quad}$ となる。

以上をまとめて，$Q(T,V,N)$ の計算結果は，V^N をくくり出して

$$Q(T,V,N) = V^N \boxed{②\qquad\qquad}$$

となる。

空欄①②に入る数式をそれぞれ答えよ。答えのみでよい。

問 2. 運動量に関する積分 $K(T,N)$ を計算せよ。

問 3. この系のヘルムホルツの自由エネルギー

$$F(T,V,N) = -Nk_{\mathrm{B}}T\left[\ln\left(\frac{V}{N}\left(\frac{2\pi mk_{\mathrm{B}}T}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right) + 1 - \frac{a}{2}\frac{N}{V}\right]$$

を導け。系は十分に大きく $N-1 \approx N$ ，且つ低い粒子密度 $Na \ll V$ とする。

問 4. つぎの熱力学関数の関係式を，内部エネルギー E の微分形 $dE = TdS - p\,dV + \mu dN$ をもとに導け。

(1) $\displaystyle \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{E}{T} - S\right)_{V,N} = -\frac{E}{T^2}$

(2) $\displaystyle \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{E}{T} - S\right)_{T,N} = -\frac{p}{T}$

ここで，S をエントロピー，p を圧力，μ を化学ポテンシャルとする。

問 5. 問 3 に示したヘルムホルツの自由エネルギーから，低い粒子密度 $Na \ll V$ における状態方程式

$$p(V-b) = Nk_{\mathrm{B}}T$$

を求めて，理想気体からの体積のずれ b を排除体積の大きさ a を用いて表せ。

問 6. 等温圧縮率 $K_T = -\dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial p}\right)_{T,N}$ を計算し，p, T, $\dfrac{b}{N}$ を用いて表せ。

[IV-B]

一様な静磁場 $\boldsymbol{H}$（大きさ H）に置かれた物体が温度 T の熱平衡状態にあるとき，1 モルあたりの磁化が

$$\boldsymbol{M}(T) = \boldsymbol{M}_0 \tanh \frac{M_0 H}{N_{\mathrm{A}} k_{\mathrm{B}} T}$$

であり，$T = 0$ における 1 モルあたりの磁化 $\boldsymbol{M}_0$（大きさ M_0）と $\boldsymbol{H}$ の向きは同じとする。以下の手順で，この物体の磁化に関する分配関数や状態密度を求めてみよう。

問 1. 有限な温度（$0 < T < \infty$）において，この物体は，強磁性体，常磁性体，反磁性体，反強磁性体のいずれに分類されるかを答えよ。答えのみでよい。

問 2. この物体 1 モルあたりの磁化に関するヘルムホルツの自由エネルギー $F(T, H)$ を求めよ。ただし，$H \to 0$ の極限を $F = 0$ にとること。

問 3. 逆温度 $\beta = \dfrac{1}{k_{\mathrm{B}} T}$ を用いて，この物体 1 モルの磁化に関する分配関数が

$$Z(\beta, H) = 2^{-N_{\mathrm{A}}} \sum_{n=0}^{N_{\mathrm{A}}} \frac{N_{\mathrm{A}}!}{n!(N_{\mathrm{A}} - n)!}\ e^{-\beta E_n}$$

と表されることを示せ。ここで，$E_n = \left(\dfrac{2n}{N_{\mathrm{A}}} - 1\right) M_0 H$ とする。

逆温度 β で表した分配関数

$$Z(\beta, H) = \int_{E_0}^{\infty} \Omega_H(E)\, e^{-\beta E} dE$$

は，状態密度 $\varOmega_H(E)$ のラプラス変換とみることができる。E_0 は内部エネルギーの最小値である。変数 β を複素数へ拡張して，問 3 で示した分配関数を解析接続する。この複素関数の逆ラプラス変換は，この物体の磁化に関する状態密度

$$\begin{aligned}
\varOmega_H(E) &= \lim_{L \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - iL}^{\gamma + iL} Z(\beta, H)\ e^{\beta E}\, d\beta \\
&= 2^{-N_{\mathrm{A}}} \sum_{n=0}^{N_{\mathrm{A}}} \frac{N_{\mathrm{A}}!}{n!(N_{\mathrm{A}} - n)!}\ e^{\gamma(E - E_n)} \lim_{L \to \infty} f_L(E - E_n)
\end{aligned}$$

を与える。ここで，i を虚数単位，γ を実定数とし，$f_L(q) = \dfrac{\sin(Lq)}{\pi q}$ とおいた。
$f_L(q)$ が $L \to \infty$ の極限においてデルタ関数となるための条件を満たすかを調べよう。

条件 1： $\displaystyle \lim_{L\to\infty} f_L(q) = \begin{cases} \infty & (q = 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (q \neq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$

条件 2： $\displaystyle \int_{-\infty}^{\infty} f_L(q)dq = 1$

問 4. 条件 1 を示せ。ただし，$q \neq 0$ についての条件は，0 を含まない区間 $a < q < b$ において，任意の連続な関数 $G(q)$ に対する積分の極限が $\displaystyle \lim_{L\to\infty} \int_a^b G(q) f_L(q)dq = 0$ となることを意味する。

問 5. 条件 2 の積分は，変数変換 $x = Lq$ によって $\displaystyle \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{\pi x}dx$ と書き換えられ，さらに，図 2 のように $i\epsilon$ だけ平行移動した経路 I に沿った積分 $\displaystyle \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} \frac{\sin z}{\pi z}dz$ と同値になる。ここで，$\epsilon > 0$, $z = x + iy$ とする。被積分関数を分割して表した

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} \frac{e^{iz}}{z}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} \frac{e^{-iz}}{z}dz$$

の各項の積分を計算し，条件 2 を示せ。計算で用いた積分経路を明示すること。

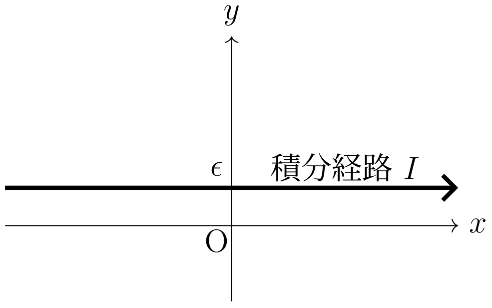


図 2

別紙　（問題 [IV]）

解答に際して，以下の定理や公式の結果を使ってよい。ただし，これらが適用できる条件を，各問で設定されている式や値を用いて具体的に明記すること。

1. ガウス積分：　定数 $a > 0$ のとき，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{1}$$

2. スターリングの公式：　$N \gg 1$ のとき，

$$\ln N! \approx \ln\left[\left(\frac{N}{e}\right)^N\right] \tag{2}$$

3. リーマンの補助定理（リーマン・ルベーグの定理）：

関数 $f(x)$ が $a \leq x \leq b$ において連続であるとき，

$$\lim_{L\to\infty} \int_a^b f(x) \sin(Lx)\, dx = 0 \tag{3}$$

4. コーシーの積分公式：

正の向きをもった単純閉曲線 C 上および内部において，$f(z)$ が正則であるとき，

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \tag{4}$$

が成り立つ。ただし，z_0 は C の内部の点である。

5. ジョルダンの補助定理：

$|z| \to \infty$ で 0 に収束する $f(z)$ について，

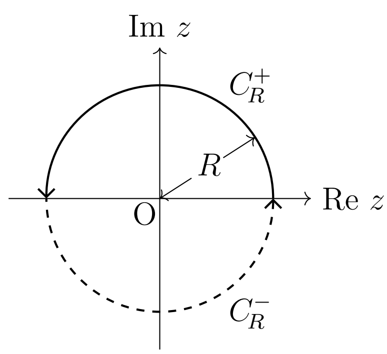
$a > 0$ のとき，原点を中心とする半径 R の上半円 C_R^+（実線）に沿った積分について

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R^+} f(z)\, e^{iaz} dz = 0 \tag{5}$$

$a < 0$ のとき，原点を中心とする半径 R の下半円 C_R^-（破線）に沿った積分について

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R^-} f(z)\, e^{iaz} dz = 0 \tag{6}$$

が成り立つ。



積分経路の図

令和８年度　大学院修士課程入試　筆記試験　出題意図

物理学Ⅰ
キャベンディッシュの実験，フーコーの振り子を題材として，修士課程における研究に必要な力学・解析力学の基礎的な知識を問う．

物理学Ⅱ
仮想的な真空同軸ケーブル，シュテルン＝ゲルラッハ実験を題材として，修士課程における研究に必要な電磁気学の基礎的な知識を問う．

物理学Ⅲ
２準位系，荷電粒子の運動を題材として，修士課程における研究に必要な量子力学の基礎的な知識を問う．

物理学Ⅳ
排除体積をもった多粒子系，２準位系を題材として，修士課程における研究に必要な熱力学・統計力学とこれらに付随する物理数学の基礎的な理解を問う．